CHAPITRE 2

SÉRIES NUMÉRIQUES

I Compléments sur les séries numériques

1 Règle de d'Alembert

Proposition (Règle de d'Alembert)
Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle qu'à partir d'un certain rang, u_n ne s'annule pas.

1. *On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel qu'à partir d'un certain rang, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant k$. Alors la série de terme général u_n converge absolument.*
2. *On suppose qu'à partir d'un certain rang, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant 1$. Alors la série de terme général u_n diverge.*

En particulier, si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l$, alors $\sum u_n$ converge absolument si $l < 1$ et diverge si $l > 1$.

Schéma de preuve ◀ Comparer à une série géométrique. ▶

2 Formule de Stirling

Proposition (Formule de Stirling)
On a l'équivalent $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Schéma de preuve ◀ Poser $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$. On veut la convergence de $\ln u_n$. En passant à la série associée, on a la convergence attendue et ainsi $n! \sim C\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Reste à déterminer C. ▶

Lemme *On pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$. Alors $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.*

Schéma de preuve ◀ On a (W_n) décroissante. Par IPP, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$ et déjà $W_{n+1} \sim W_n$. De plus $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2$ par récurrence immédiate. Donc $nW_n^2 \sim \pi/2$. Vu que $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$, en remplaçant par l'équivalent précédent de $n!$, on trouve $C = \sqrt{2\pi}$. ▶

3 Séries alternées

Définition *La suite réelle a_n est dite alternée si $(-1)^n a_n$ est de signe constant. La série de terme général a_n est dite alternée si (a_n) l'est.*

Proposition (Théorème des séries alternées) *Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite alternée. Si $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et tend vers 0, alors la série de terme général u_n converge. De plus*

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est compris entre deux sommes partielles consécutives ;*
- *le reste* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ *est du signe de u_{n+1} et $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.*

Schéma de preuve ◀ Vient du caractère adjacent de (S_{2n}, S_{2n+1}). ▶

4 Comparaison séries-intégrales

Proposition *Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux sur tout segment de $\mathbb{R}^+$ et décroissante. Alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f - f(n)$ converge.*

Schéma de preuve ◀ On a l'encadrement $f(n) \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} f \leqslant f(n-1)$. ▶

Exemple

1. On a pour $\alpha > -1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
2. (Séries de Bertrand) La série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement si soit $\alpha > 1$, soit $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
3. Si $\alpha < 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln^\alpha k} \sim \frac{\ln^{1-\alpha} n}{1-\alpha}$; en particulier $\displaystyle\sum \frac{1}{k\ln^\alpha k}$ diverge.

   Si $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum \frac{1}{k\ln^\alpha k}$ converge. Et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \sim \ln\ln n$, donc diverge.
4. La série de terme général $\dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ converge : en posant $f(t) = \sin\sqrt{t}/t$, $a_n = f(n)$, $b_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\mathrm{d}t$ et $c_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} (n-t)f'(t)\mathrm{d}t$, on a $b_n - a_n = c_n$ (formule de Taylor) ; $\sum c_n$ converge, donc $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature ; $\sum b_n$ converge (IPP avec $(1-\cos)' = \sin$).

5 Sommation des relations de comparaison

Proposition (Sommation des relations de comparaison – cas divergent) *Soit $\sum a_n$ une série* divergente *à termes positifs à partir d'un certain rang et $\sum u_n$ une série complexe.*

1. *Si $u_n = O(a_n)$, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$.

2. *Si* $u_n = o(a_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$.

3. *Si* $u_n \sim a_n$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Schéma de preuve ◀ On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. Donc $A_n \to +\infty$.

1. On dispose de $N \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tel que $n \geqslant N$ implique $|u_n| \leqslant Ca_n$, et donc $|U_n| \leqslant |U_N| + C|A_n - A_N| \leqslant |U_N| + C|A_n|$. Puisque $A_n \to +\infty$, il existe $N' \geqslant N$ tel que $n \geqslant N'$ implique $|U_N| \leqslant CA_n$.
2. Pareil en remplaçant $\exists C$ par $\forall \varepsilon$.
3. On applique (2) à $u_n - a_n = o(a_n)$.

▶

Corollaire (lemme de Cesàro)

Si (u_n) *est une suite complexe qui tend vers* $l \in \mathbb{C}$*, alors* $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ *converge aussi vers* l.

Schéma de preuve ◀ On applique la proposition précédente à $u_n - l = o(1)$. ▶

Proposition (Sommation des relations de comparaison – cas convergent) *Soit* $\sum a_n$ *une série* convergente *à termes positifs à partir d'un certain rang et* $\sum u_n$ *une série complexe.*

1. *Si* $u_n = O(a_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$.
2. *Si* $u_n = o(a_n)$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$.
3. *Si* $u_n \sim a_n$*, alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Schéma de preuve ◀ Soit $\widehat{U}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\widehat{A}_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

1. Si $|u_n| \leqslant Ca_n$ pour $n \geqslant N$, alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leqslant C \sum_{k=n+1}^{p} a_k$ pour tout $p \geqslant N+1$.
2. Idem.

▶

Remarque Si (u_n) suite réelle tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ converge aussi vers $+\infty$.

Exemple On a le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où $\gamma \in [1/2, 1]$ s'appelle la constante d'Euler (ou d'Euler-Mascheroni). On a $\gamma \simeq 0,577\,215\,664\,901$.

6 Techniques avancées (HP)

(Transformation d'Abel) Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites complexes. Alors

$$\sum_{k=p}^{q-1} v_k(u_{k+1} - u_k) = u_q v_q - u_p v_p - \sum_{k=p}^{q-1} u_{k+1}(v_{k+1} - v_k).$$

Exemple

1. La série de terme général $\dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 0$ et θ non congru à 0 *modulo* 2π.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k \ln k \sim 2^{n+1} \ln n.$

II Dénombrabilité

1 Équipotence

Définition *Les ensembles X et Y sont équipotents s'il existe une bijection de X sur Y.*

Remarques

1. La relation d'équipotence, notée $\sim$, est réflexive, symétrique, transitive.
2. Si $A \sim A'$, $B \sim B'$ alors $A \times B \sim A' \times B'$ et $B^A \sim B'^{A'}$.
3. X et $\mathcal{P}(X)$ ne sont jamais équipotents.

2 Dénombrabilité

Définition *Un ensemble est dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.*

Proposition *Toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

Schéma de preuve ◄ Construire une suite injective d'éléments par récurrence. ►

Remarque S'il existe une injection de X dans un ensemble dénombrable, X est dénombrable ou fini. L'image d'un dénombrable par une application est dénombrable ou fini.

Proposition *L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.*

Schéma de preuve ◄ L'application $(s,t) \mapsto 2^s(2t+1) - 1$ est une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$. ►

Proposition

1. *Si A et B sont dénombrables, $A \times B$ est dénombrable.*
2. *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont dénombrables, $A_1 \times \cdots \times A_n$ est dénombrable. En particulier, $\mathbb{N}^p$ est dénombrable.*
3. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles tous dénombrables. Si I est dénombrable ou fini, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.*
4. *Les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.*
5. *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles tous dénombrables ou finis. Si I est dénombrable ou fini, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est dénombrable ou fini.*

Proposition (Cantor) *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Schéma de preuve ◀ Il suffit de montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable. On raisonne par l'absurde : soit $u : n \mapsto u_n$ une bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1]$. On construit par récurrence une suite emboîtée de segments (I_n). On coupe I_0 en trois sous-segments de même longueur et on en choisit un I_0 tel que $u_0 \notin I_0$. On recommence de sorte que $I_{n+1} \subset I_n$, $u_n \notin I_n$ et $\text{long}(I_{n+1}) = \frac{1}{3}\text{long}(I_n)$. Mais alors $\cap_{n \geqslant 0} I_n = \{x_0\} = \{u_p\}$; contradiction avec $u_p \notin I_p$. ▶

Remarque Si X est infini et $F \subset X$ est fini, alors $X \setminus F$ est équipotent à X.

III Familles sommables

1 Familles sommables positives

On note $\mathcal{P}_f(X)$ l'ensemble des parties finies de X. L'écriture $I = \sqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ signifie que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de I telle que $I_n \cap I_p = \emptyset$ si $n \neq p$ et $\cup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$. Si tous les I_n sont non vides, il s'agit donc d'une partition de I.

Définition *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs où I est dénombrable.*

- *La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si l'ensemble $\left\{\sum_{i\in F} u_i | F \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$ est majoré.*
- *On appelle somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$, notée $\sum_{i\in I} u_i$, la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}^+}$ de $\left\{\sum_{i\in F} u_i | F \in \mathcal{P}_f(I)\right\}$; cette somme est donc réelle si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $+\infty$ si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable.*

Remarque

1. Si $I' \subset I$ et que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $(u_i)_{i\in I'}$ est sommable et $\sum_{i\in I'} u_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.
2. Si $\sigma : I' \to I$ est une bijection, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I'}$ est sommable si et seulement si $(u_i)_{i\in I}$ l'est. Dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in I'} u_{\sigma(j)}$.
3. Si $(u_i)_{i\in I\sqcup J}$ avec $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_i)_{i\in J}$ sommables, alors $(u_i)_{i\in I\sqcup J}$ est sommable et $\sum_{i\in I\sqcup J} u_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in J} u_i$.
4. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles de réels positifs tels que $v_i \leqslant u_i$ pour tout $i \in I$ et $(u_i)_{i\in I}$ sommable, alors $(v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I} u_i$.
5. Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, alors $(u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable et $\sum_{i\in I} u_i + v_i = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

Proposition (Sommation par paquets) *Soit I un ensemble dénombrable, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de I telle que $I = \coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n$.*

Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si

1. *pour tout entier n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;*

2. *la série (positive) de terme général* $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ *est convergente.*

Dans ce cas, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{i\in I_n} u_i)$.

Exemple La famille $\big(\frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\big)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 1$. (Considérer les paquets $\{(m,n)/|m|+|n| = p\}$.)

2 Familles sommables complexes

Définition *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille de nombres complexes où* I *est dénombrable. La famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si* $(|u_i|)_{i\in I}$ *l'est.*

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $x^+ = x$ si $x \geqslant 0$ et $x^+ = 0$ sinon ; de même $x^- = -x = |x|$ si $x \leqslant 0$ et $x^- = 0$ sinon.

Définition

1. *Soit* $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ *une famille sommable. Alors* $(u_j^+)_{j\in I}$ *et* $(u_j^-)_{ij\in I}$ *sont sommables. On définit la somme de* $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ *comme* $\sum_{j\in I} u_j^+ - \sum_{j\in I} u_j^-$.
2. *Soit* $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{C}^I$ *une famille sommable. Alors* $(\mathrm{Re}(u_j))_{j\in I}$ *et* $(\mathrm{Im}(u_j))_{j\in I}$ *sont sommables. On définit la somme de* $(u_j)_{j\in I} \in \mathbb{R}^I$ *comme* $\sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in I} \mathrm{Im}\, u_j$.

Proposition *La sommabilité de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ *équivaut à la convergence absolue de la série de terme général* u_n.

Proposition (Sommation par paquets) *Soit* I *un ensemble dénombrable,* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille sommable de nombres complexes et* $I = \coprod_{n\in\mathbb{N}} I_n$. *Alors la série de terme général* $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ *est absolument convergente et* $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Proposition *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille complexe sommable et* $\sigma : I' \to I$ *une bijection. Alors* $(u_{\sigma(j)})_{j\in I}$ *est sommable et* $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in I'} u_{\sigma(j)}$.

Proposition (Linéarité) *Soient* $(u_i)_{i\in I}$ *et* $(v_i)_{i\in I}$ *deux familles complexes sommables, et* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. *Alors* $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ *est sommable et* $\sum_{i\in I}(\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda\sum_{i\in I} u_i + \mu\sum_{i\in I} v_i$.

3 Séries doubles

Définition *Une série double est une famille indexée par* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Proposition *La famille* $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^2}$ *est sommable si et seulement si les séries* $\sum_n a_{n,p}$ *sont convergentes et que la série* $\sum_p \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p}$ *converge. On a alors*

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}.$$

Proposition *Soit* $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in (\mathbb{C})^{\mathbb{N}^2}$ *sommable. Alors les séries* $\sum_n a_{n,p}$ *(resp.* $\sum_p a_{n,p}$*) sont convergentes et* $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p}$.

On appelle produit de Cauchy des deux séries complexes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Proposition (Produit de Cauchy) *Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent et* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Exemples On définit la fonction "zéta" d'Euler $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

1. On a $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} = \zeta(2)$.
2. $\sum_{n\geqslant 2}(\zeta(n)-1)$ converge vers 1.
3. $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 1$.
4. Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$. Alors pour tout réel ou complexe x tel que $|x| < 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$.