Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers, $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté $\overline{a}$. On note P l'ensemble des éléments de $\{1,\dots,N-1\}$ qui sont premiers avec N. L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ est noté $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. On rappelle que φ, l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P. Si a divise b dans $\mathbb{Z}$, on notera $a|b$.

On appelle "caractère *modulo N*" une fonction $g : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telle que

— g restreinte à $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ est à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et est un morphisme de groupe;

— g est nulle sur tout élément non-inversible de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Enfin, pour toute fonction $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, on considère les propriétés :

A. χ est non identiquement nul.

B. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, non premier avec N, $\chi(a) = 0$.

C. Pour tous les entiers relatifs a et b, $\chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$.

D. χ est N-périodique : pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $\chi(a+N) = \chi(a)$.

On fixe désormais pour les parties II, III et IV une application $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés A, B, C, D.

I Résultats préliminaires

1. Soient $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$
Montrer que pour tous n, m entiers tels que $2 \leqslant n < m$
$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k(u_k - u_{k+1}) + u_m T_m.$$

2. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$,
$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$
(On pourra écrire $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + R_n(x)$ *et trouver une forme simple pour* $R_n(x)$.*)*

3. (a) Soit $\chi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés A, B, C, D.
Montrer qu'en posant $\widetilde{\chi}(\overline{a}) = \chi(a)$, $\widetilde{\chi}$ est un caractère *modulo N*.

   (b) Montrer réciproquement qu'à tout caractère g *modulo N*, il existe une unique fonction χ vérifiant les propriétés A, B, C, D et telle que $g = \widetilde{\chi}$.

II Cas particuliers

4. Calculer $\chi(1)$.

5. Lorsque $N = 2$, déterminer χ.

On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $N = 4$.

6. Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.

7. On suppose maintenant que $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la valeur de la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}.$$

III Convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N. Pour $k \in \{1,\dots,N-1\}$, on désigne par r_k le reste de la division euclidienne de ak par N.

8. En considérant le produit $\prod_{k\in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N.

9. Montrer que $\left|\chi(a)\right| = 1$.
10. Montrer que les r_k sont deux à deux distincts.
11. Établir l'identité :
$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N tel que $\chi(a) \neq 1$.

12. Pour chaque entier n, calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
On pourra commencer par le cas $n = 0$.
13. Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité
$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leqslant \varphi(N).$$
14. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}, n \geqslant 1\right)$ est convergente.

IV Comportement asymptotique

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$f_n = \sum_{d \mid n} \chi(d),$$
où, dans la définition, d décrit l'ensemble des diviseurs entiers (positifs) de n.

15. Soient n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer que $f_{nm} = f_n f_m$.
16. Soient p un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Calculer f_{p^α}.
17. Pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'encadrement :
$$0 \leqslant f_n \leqslant n.$$
18. Pour tout entier $n \geqslant 1$, montrer que $f_{n^2} \geqslant 1$.
19. Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$ pour tout réel x tel que $|x| < 1$.

On note $f(x)$ la somme de cette série.

20. Montrer, pour tout $x \in [1/2, 1[$:
$$f(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$
(On pourra utiliser une comparaison d'une série à une intégrale.)

V Caractères

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. Un caractère de G est un morphisme de groupe de G dans $\mathbb{U}$.

21. Déterminer les caractères de $\mathbb{Z}$.
22. (a) Montrer que les caractères de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ sont exactement les applications $t \mapsto e^{ixt}$ où x est un paramètre réel.
(On pourra dériver l'égalité $g(s+t) = g(s)g(t)$.)
(b) Montrer que les caractères continus de $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et en déduire les caractères continus de $\mathbb{R}$.
(On pourra intégrer l'égalité $g(s+t) = g(s)g(t)$ sur $[0, \varepsilon]$.)
23. Montrer par récurrence que si $h_1, \dots, h_n$ sont des caractères distincts de G, alors la famille de fonctions $(h_1, \dots, h_n)$ est libre.
(Si un caractère h s'écrit $h = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k$ où les h_k sont des caractères distincts, on pourra évaluer de deux manières $h(x+y)$ et utiliser la liberté des h_k.)