I Résultats préliminaires

1. On a en développant et par changement d'indice :

$$\begin{aligned}
& -u_nT_{n-1}+\sum_{k=n}^{m-1}(u_k-u_{k+1})T_k+u_mT_m \\
&= -u_nT_{n-1}-\sum_{k=n}^{m-1}u_{k+1}T_k+\sum_{k=n}^{m-1}u_kT_k+u_mT_m \\
&= -\sum_{k=n-1}^{m-1}u_{k+1}T_k+\sum_{k=n}^{m}u_kT_k \\
&= -\sum_{k=n}^{m}u_kT_{k-1}+\sum_{k=n}^{m}u_kT_k=\sum_{k=n}^{m}u_k(T_k-T_{k-1})=\sum_{k=n}^{m}u_k\alpha_k
\end{aligned}$$

2. Il suffit de le démontrer pour $x\in[0,1]$ par imparité de arctan et des monômes x^{2n+1}. On écrit (somme d'une suite géométrique)

$$\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^nt^{2n},$$

et donc

$$\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^nt^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}t^{2n+2}}{1+t^2}.$$

En intégrant entre 0 et x (avec $x\in[0,1]$) cette égalité, on trouve que

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\int_0^x\frac{t^{2n+2}dt}{1+t^2}.$$

Le terme intégrale (intégrale d'une fonction continue sur un segment) $(-1)^{n+1}\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2n+2}dt}{1+t^2}$ est majoré en valeur absolue par

$$\int_0^x t^{2n+2}dt=\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\leqslant\frac{1}{2n+3},$$

et donc tend vers 0. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

3. (a) On pose $\widetilde{\chi}(\overline{a})=\chi(a)$.

• $\widetilde{\chi}$ est bien définie : il faut vérifier que $\widetilde{\chi}(\overline{a})$ ne dépend pas du représentant de $\overline{a}$ choisi. Si $\overline{a}=\overline{b}$, alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $b=a+kN$. Mais alors $\chi(b)=\chi(a+kN)=\chi(a)$ d'après D.

• Si $\overline{a}$ n'est pas inversible modulo N, alors a n'est pas premier à N (cours), et donc $\widetilde{\chi}(\overline{a})=\chi(a)=0$ d'après B.

• On verra à la question 4 que $\chi(1)=1$. Si $\overline{a}$ est inversible d'inverse $\overline{b}$, on a $1=\widetilde{\chi}(\overline{ab})=\widetilde{\chi}(\overline{a})\widetilde{\chi}(\overline{b})$. Donc $\widetilde{\chi}(\overline{a})\neq0$. De plus, $\widetilde{\chi}(\overline{ab})=\widetilde{\chi}(\overline{a})\widetilde{\chi}(\overline{b})$ d'après C.

Donc $\widetilde{\chi}$ est un bien un caractère modulo N.

(b) On pose $\chi(a)=g(\overline{a})$. On a donc $\widetilde{\chi}=g$ par définition.

• On a $\widetilde{\chi}(\overline{1})=1$ (morphisme). D'où A.

• g étant un caractère modulo N, g est nulle sur les $\overline{a}$ non inversibles, *i.e.* χ est nulle sur les entiers non premiers à N. D'où B.

• La relation $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$ est vraie si a et b sont premiers à N car g est un morphisme sur $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Elle est aussi vraie si a ou b n'est pas premier à N, car alors $\chi(a)=0$ ou $\chi(B)=0$, ainsi que $\chi(ab)$ car ab n'est pas inversible modulo N. D'où C.

• Enfin $\chi(a+N)=g(\overline{a+N})=g(\overline{a})=\chi(a)$. D'où D.

II Cas particuliers

4. On a $\chi(1)=\chi(1\times1)=\chi(1)^2$; donc $\chi(1)$ vaut 0 ou 1. Comme $\chi(k)=\chi(1\times k)=\chi(1)\chi(k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et que χ n'est pas identiquement nulle, $\chi(1)\neq0$. Donc $\chi(1)=1$.

5. Par périodicité, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\chi(k)=\begin{cases}0 & \text{si } k \text{ est pair}\\ 1 & \text{si } k \text{ est impair}\end{cases}$.

Inversement, vérifions que cette application vérifie les 4 axiomes. Déjà k est premier à 2 si et seulement si k est impair. Donc $\chi(ab)=\chi(a)\chi(b)$ (clair si a ou b est nul, et aussi si $a=b=1$). D'où A, B, C, D.

6. On a $\chi(3)=\chi(-1)$. De plus, $\chi(-1)^2=\chi((-1)\times(-1))=\chi(1)=1$. Donc $\chi(3)=\chi(-1)\in\{1,-1\}$.

7. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\chi(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } k \equiv 1\ [4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 3\ [4] \end{cases}$; donc $\chi(2k+1) = (-1)^k$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(k)}{k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\chi(2k+1)}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

III Convergence de la série $\sum_1^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}$

8. Comme $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, l'application $x \mapsto \overline{a}x$ est une bijection de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ (mais aussi de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \smallsetminus \{\overline{0}\}$) car l'application bien définie $x \mapsto \overline{a}^{-1}x$ est manifestement une application réciproque. Donc

$$\overline{\prod_{k\in P} ak} = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} \overline{a}x = \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x.$$

Or

$$\overline{\prod_{k\in P} ak} = \overline{a}^{\varphi(N)} \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x.$$

Comme $\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$ est inversible comme produit d'inversibles, de l'égalité $\prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x = \overline{a}^{\varphi(N)} \prod_{x\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*} x$, on tire $\overline{a}^{\varphi(N)} = \overline{1}$, *i.e.* N divise $a^{\varphi(N)} - 1$.

9. Par périodicité, $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(1) = 1$; par morphisme, $\chi(a^{\varphi(N)}) = \chi(a)^{\varphi(N)}$. Comme $\chi(a)$ est un réel, $\chi(a) = \pm 1$.

10. L'application $\bar{x} \mapsto \bar{a}\bar{x}$ étant une bijection de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a

$$\{\overline{ax} | \bar{x} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\overline{x} | \bar{x} \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \setminus \{0\}\} = \{\overline{r_k} | 1 \leqslant k \leqslant N-1\}.$$

11. Par périodicité, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k)$. Par bijectivité de $k \mapsto r_k$ sur $\{1,\dots,N-1\}$, $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(r_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$. D'où l'identité demandée.

12. Comme $\chi(n) = \chi(n+N)$, $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$ ne dépend pas de n (récurrence immédiate sur n). Pour $n = 0$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k).$$

En choisissant a tel que $\chi(a) \neq 1$, ce qui est possible d'après l'énoncé : $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$ et $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$ également.

13. On considère l'entier q tel que $qN \leqslant k < (q+1)N$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} \chi(k) &= \sum_{k=0}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{qN-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) \\ &= \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{k=iN}^{iN+N-1} \chi(k) + \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) \\ &= \sum_{k=qN}^{m} \chi(k) = \sum_{k=0}^{m-qN} \chi(k) = \sum_{k=1}^{m-qN} \chi(k). \end{aligned}$$

Comme $\chi(k) \in \{-1, 0, 1\}$, que $m - qN \leqslant N-1$, et qu'entre 1 et $N-1$ il y a exactement $\varphi(N)$ valeurs de k telles que $\chi(k) \neq 0$,

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-qN} \chi(k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m-qN} |\chi(k)| \leqslant \varphi(N).$$

14. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} \chi(k) = \sum_{k=1}^{n} \chi(k)$ et on utilise la transformation d'Abel avec $u_k = \frac{1}{k}$. Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\chi(k)}{k} = -\frac{T_1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{T_n}{n}.$$

Comme (T_n) est une suite bornée, $\frac{T_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme $\left|T_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right| \leqslant \varphi(N)\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, que $\varphi(N)$ est une constante et que la série $\sum\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ converge (car la suite $(1/k)$ converge), la série $\sum T_k\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$ converge absolument, donc converge.

D'où la convergence de la suite $\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{\chi(k)}{k}\right)$ et celle de $\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\chi(k)}{k}\right)$.

IV Comportement asymptotique

15. On se limite aux diviseurs dans $\mathbb{N}$. Notons $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.

    Montrons d'abord que l'application $F:\mathscr{D}(n)\times\mathscr{D}(m)\to\mathscr{D}(mn)$, $(u,v)\mapsto uv$ est une bijection : on décompose $n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$ et $m=q_1^{\beta_1}\cdots q_r^{\beta_r}$ en facteurs premiers. Les p_j sont différents des q_j car $n\wedge m=1$.

    Déjà, F est bien définie car uv divise nm si $u|n$ et $v|m$.

    Injectivité : si $(u,v),(u',v')\in\mathscr{D}(n)\times\mathscr{D}(m)$ sont tels que $uv=u'v'$. On a $u|u'v'$ et $u\wedge v'=1$ car u et v' n'ont aucun facteur premier commun (sinon ce facteur diviserait u et m, donc n et m). D'où $u|u'$ et par symétrie, $u=u'$. Donc $v=v'$.

    Surjectivité : un diviseur de mn est de la forme $d=p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}q_1^{m_1}\cdots q_r^{m_r}$. On pose $u=p_1^{n_1}\cdots p_r^{n_r}$ et $v=q_1^{m_1}\cdots q_r^{m_r}$ et $F(u,v)=d$.

    On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} f_{nm} &= \sum_{d\in\mathscr{D}(nm)}\chi(d) = \sum_{(u,v)\in\mathscr{D}(n)\times\mathscr{D}(m)}\chi(uv) = \sum_{u\,|\,n \text{ et } v\,|\,m}\chi(u)\chi(v) \\ &= \sum_{u\,|\,n}\sum_{v\,|\,m}\chi(u)\chi(v) = \sum_{u\,|\,n}\chi(u)\sum_{v\,|\,m}\chi(v) = f_nf_m \end{aligned}$$

16. Comme p est premier, les diviseurs de p^α sont les p^β avec $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$.
    Comme $\chi(p^\beta)=\chi(p)^\beta$ et que $\chi(p)\in\{-1,0,1\}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{p^\alpha} &= \sum_{\beta=0}^{\alpha}\chi(p)^\beta = \begin{cases}\alpha+1 & \text{si } \chi(p)=1\\ \dfrac{1-\chi(p)^{\alpha+1}}{1-\chi(p)} & \text{sinon}\end{cases} \\ &= \begin{cases}\alpha+1 & \text{si } \chi(p)=1\\ 1 & \text{si } \chi(p)=0\\ 0 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } \alpha \text{ impair}\\ 1 & \text{si } \chi(p)=-1 \text{ et } \alpha \text{ pair}\end{cases} \end{aligned}$$

    Donc $f_{p^\alpha}\geqslant 0$.

17. Comme n possède au plus n diviseurs dans $\mathbb{N}$ et que $\chi\leqslant 1$, on a : $f_n\leqslant n$.

    Si $n\geqslant 2$: on utilise l'écriture primaire de n : $n=\prod_{i=1}^{q}p_i^{\alpha_i}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts et les α_i des entiers au moins égaux à 1. Par multiplicativité de f, comme les $p_i^{\alpha_i}$ sont premiers entre eux deux à deux, $f_n=\prod_{i=1}^{q}f_{p_i^{\alpha_i}}$. Donc $f_n\geqslant 0$.

18. Pour $n\geqslant 2$, on reprend les notations de la question précédente. Alors $f_{n^2}=\prod_{i=1}^{q}f_{{p_i}^{2\alpha_i}}$. Or, à la question 13, avec α pair, quelle que soit la valeur de $\chi(p)\in\{-1,0,1\}$, $f_{p^\alpha}>0$. Donc $f_{n^2}>0$. Comme f_{n^2} est dans $\mathbb{Z}$, $f_{n^2}\geqslant 1$.

19. Si $|x|<1$, alors $|f_nx^n|\leqslant n|x|^n=o(1/n^2)$ par croissances comparées. D'où $\sum_n f_nx^n$ converge absolument. *(On pouvait ausi utiliser le critère de d'Alembert.)*

20. Comme $x\geqslant 0$ et $f_n\geqslant 0$, on a : $f(x)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}f_{n^2}x^{n^2}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}x^{n^2}$.

    On définit la fonction g par $g(t)=x^{t^2}=\mathrm{e}^{t^2\ln x}$; g est continue sur $[1,+\infty[$, décroissante, intégrable ($\ln x<0$).

    Pour tout $n\geqslant 1$, on a : $g(n)=\int_n^{n+1}g(n)\,\mathrm{d}t\geqslant\int_n^{n+1}g(t)\,\mathrm{d}t$.

    Donc $f(x)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}g(n)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}g(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t$.

Le changement de variable affine $u = t\sqrt{-\ln x}$ donne :

$$\int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_{\sqrt{-\ln x}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{1}{\sqrt{-\ln x}}\int_{\sqrt{\ln 2}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

car $-\ln x \leqslant \ln 2$. D'où la minoration demandée.

V Caractères

21. Le groupe $\mathbb{Z}$ étant monogène, un morphisme $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{U}$ est uniquement déterminé par l'image de 1 (puisque $\{1\}$ engendre $\mathbb{Z}$). On écrit $\varphi(1) = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(n) = e^{in\theta}$. Réciproquement, $n \mapsto e^{in\theta}$ est bien un caractère.

22. (a) On dérive l'égalité $g(s+t) = g(s)g(t)$ par rapport à s et on évalue en $s = 0$. On obtient $g'(t) = g'(0)g(t)$. On connait les solutions sur $\mathbb{C}$ de cette équation différentielle ; ce sont les $t \mapsto Ce^{\alpha t}$ où $\alpha = g'(0)$ et $C \in \mathbb{C}$ quelconque. Mais $g(0) = 1$ (car g morphisme de groupe) donne $C = 1$, puis $|g(t)| = 1$ donne $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$. Donc $g(t)$ est de la forme e^{ixt} où $x \in \mathbb{R}$. Réciproque immédiate.

    (b) Montrons que les caractères continus de $\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, ce qui donnera que les caractères continus de $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto e^{ixt}$ d'après la question précédente.

    Puisque $g(0) = 1$ et que g est continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\displaystyle\int_0^{\varepsilon} g(t)dt \neq 0$. En intégrant l'égalité $g(s+t) = g(s)g(t)$ entre 0 et ε, et en notant G la primitive de g qui s'annule en 0, on trouve que

    $$\int_0^{\varepsilon} g(s+t)ds = \int_t^{t+\varepsilon} g(s)ds = G(t+\varepsilon)-G(t) = g(t)\int_0^{\varepsilon} g(s)ds = g(t)G(\varepsilon).$$

    Donc $g(t) = \dfrac{1}{G(\varepsilon)}\big(G(t+\varepsilon) - G(t)\big)$ et g est de classe $\mathscr{C}^1$ par composition.

23. La propriété est vraie pour $n = 1$ car une famille réduite à une fonction non nulle est libre.

    On suppose la propriété vraie au rang n. Par l'absurde : supposons donc que l'on dispose de $n+1$ caractères distincts format une famille liée. On peut donc écrire $h = \lambda_1 h_1 + \cdots + \lambda_n h_n$ où les λ_i sont des réels. On peut supposer que les λ_k sont tous non nuls, sinon on aurait une relation de liaison entre moins de n caractères linéairement indépendant (hypothèse de récurrence forte).

    Mais alors, pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a d'une part

    $$h(x+y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k(x) h_k(y).$$

    Et d'autre part

    $$h(x+y) = h(x)h(y) = \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k h_k(x)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j(y)\right).$$

    Par liberté de la famille $(h_1, \ldots, h_n)$ (hypothèse de récurrence), on a donc pour tout k $\lambda_k h_k(y) = \lambda_k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j(y)$ et donc $h_k(y) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j(y)$ puisque $\lambda_k \neq 0$. Mais ceci est une relation de liaison à coefficients non tous nuls si $n \geqslant 2$. Contradiction avec l'hypothèse de récurrence.