1 Fonctions de plusieurs variables réelles

Exercices d'application :

1. (a) Étudier la continuité de $g : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$\begin{cases} y^x & \text{si } y > 0\,; \\ 0 & \text{si } y = 0 \text{ et } x > 0\,; \\ 1 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$
   (b) Étudier l'éventuelle limite en $(0,0)$ de $(x,y) \mapsto \dfrac{x^3}{x^2+y^3}$ pour (x,y) dans l'ensemble de définition.
2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$. Calculer de deux manières (règle de la chaîne et matrice jacobienne) les dérivées (éventuellement partielles) en fonction de $\partial_x f$ et $\partial_y f$ des fonctions
$$g_1(x) = f(x,x) \qquad g_2(x,y) = f(y,x) \qquad g_3(x,y) = f(y, f(y,x))$$
$$g_4(x) = f(x, g_1(x)) \qquad g_5(x,y) = f(e^x - y, \operatorname{ch}(xy)).$$
   Calculer aussi les dérivées partielles secondes de g_5.
3. Les fonctions suivantes sont-elles continues ? de classe $\mathcal{C}^1$?
$$f_1(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$f_3(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$f_4(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = \int_0^y (x-t)\phi(t)dt.$$
   Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.
   Même question avec $g(x,y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} \sin(x-t)\phi(t)dt$.
5. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \dfrac{x\sin y - y \sin x}{x^2+y^2}$. La fonction f admet-elle un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ à $\mathbb{R}^2$?
6. (Mines 2018) On pose $f(x,y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n} + y^{2n})$.
   (a) Déterminer le domaine de définition D de f.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D.
7. Déterminer la matrice jacobienne en (x_0, y_0) de
$$(x,y) \mapsto \left(\operatorname{Re}\frac{1}{x+iy}, \operatorname{Im}\frac{1}{x+iy}\right).$$
8. (Équations aux dérivées partielles)
   (a) Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de $5\dfrac{\partial f}{\partial x} + 4\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.
   (b) Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
   (c) Déterminer toutes les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2.$$
   (Utiliser les coordonnées polaires.)

Exercice 1 * : Déterminer les valeurs de $\alpha, \beta > 0$ telles que les fonctions suivantes soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
$$f(x,y) = |x|^\alpha |y|^\beta \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha |y|^\beta}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2 * : Étudier la prolongeabilité par continuité, l'existence des dérivées partielles et le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de f donnée par $f(x,y) = y^2 \sin(x/y)$ si $y \neq 0$.

Exercice 3 * : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose
$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que g est continue.
2. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Reprendre la question précédente en écrivant g sous forme d'intégrale.
4. On pose $h(x,y) = \dfrac{\sin x - \sin y}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}$ pour $x \neq y$. Montrer que h se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. (Utiliser des formules trigonométriques.)

Exercice 4 : Soit $f, g, u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = g(u(x,y), v(x,y)).$$

Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de g, u, v.

Exercice 5 * : Soit $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $k \in \mathbb{R}$. On dit que f est k-homogène si pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(tx) = t^k f(x)$.

1. Montrer que f est k-homogène si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x)$.
2. À quelle condition sur k une fonction k-homogène est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Montrer que si $k > 1$, ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 6 : Soit $f = \arg : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\}) \to]-\pi, \pi[$ la fonction argument. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et déterminer $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$. (Pour éviter des calculs de dérivées, on pourra utiliser une matrice Jacobienne.)

Exercice 7 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière complexe de rayon de convergence $R > 0$ de somme f. On considère la fonction définie $\widetilde{f}$ sur le disque ouvert $D = D(0,R)$ par $\widetilde{f} : (x,y) \mapsto f(x+iy)$. Montrer que $\widetilde{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et que $\Delta \widetilde{f} = 0$.

Exercice 8 * – Extrema : Etudier les extrema locaux et globaux des fonctions :

1. $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - (x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $(x,y) \mapsto x + y + \dfrac{1}{xy}$ sur $]0, +\infty[^2$.
3. $(x,y) \mapsto e^{x \sin y}$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. (Mines 2018) $(x,y) \mapsto (x+y)^{x-y}$.
5. $(x,y) \mapsto x^2 y - y^2 x$ sur $[-1,1]^2$.
6. $(x,y) \mapsto xe^y + ye^x$ sur $\mathbb{R}^2$.
7. $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ sur $\mathbb{R}^3$.
8. $(x,y) \mapsto \sin x + \sin y - \sin(x+y)$ sur $\mathbb{R}^2$.
9. $(x,y,z) \mapsto xyz \ln x \ln y \ln z$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.
10. Déterminer les triangles inscrits dans un cercle d'aire maximale.

Exercice 9 (Mines 2015) :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $S \in]0, +\infty[$. On note $A = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n | x_1 + \dots + x_n = S\}$. Déterminer $\displaystyle\max_{x \in A} x_1 \cdots x_n$.
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien et ABC un triangle rectangle en A. Soit K l'envelope convexe de ABC. Pour $M \in K$, on note A'_M, B'_M, C'_M les projections orthogonales respectives de M sur (BC), (CA) et (AB). Soit $f : M \mapsto MA'_M \times MB'_M \times MC'_M$. En quel(s) point(s) f atteint-elle son maximum ?

Exercice 10 : Soit $f(x,y) = (x-y^2)(x-2y^2)$. Montrer que f restreinte à toute droite passant par $(0,0)$ y présente un minimum. Mais est-ce un minimum local de f ?

Exercice 11 * : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe des fonctions $f_1, \dots, f_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$ telles que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{U}$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k(x).$$

Exercice 12 ** : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ où $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \dots, x_n$. Calculer le déterminant jacobien de f.

Exercice 13 ** : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On note $f(x,y) = x*y$ et on suppose que la loi $*$ est une loi de groupe sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ tel que $\varphi(x*y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Interprétation ?

Exercice 14 * : À l'aide de la fonction $(x,y) \mapsto (y - x^2/2, y)$, résoudre l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Exercice 15 (*– Mines 2018) : Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x^2 - y^2)$ vérifie $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} + 1$.

Exercice 16 * : Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = 0$. Soit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1. Montrer que $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}=0$.
2. Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $r\mapsto\displaystyle\int_0^{2\pi}f(r\cos\theta,r\sin\theta)$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $(r\varphi')'=0$. En déduire que φ est constante. Interprétation ? Voyez-vous un lien avec une formule bien connue ?

Exercice 17 * : Soient $a,b\in\mathbb{R}$ et $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ vérifiant $a\dfrac{\partial f}{\partial x}+b\dfrac{\partial f}{\partial x}=f$. Montrer que si f est bornée, alors elle est nulle.

Exercice 18 : Étudier les extremums de la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par $f(x,y)=\dfrac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$.

Exercice 19 * : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction polynomiale non uniquement nulle. Soit $Z=\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)=0\}$. Montrer que Z est d'intérieur vide. En déduire que

1. l'anneau des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ est intègre ;
2. si $p\in\mathbb{N}^*$, il existe des réels $x_1,\dots,x_{p^2}$ telle que toute matrice dont ce sont les coefficients est inversible ;
3. l'ensemble des matrices $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_M=\mu_M$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (On pourra compléter $(I_n,M,\dots,M^{n-1})$ en une base le cas échéant.)

Exercice 20 (X 2019) :** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $Z=f^{-1}(\{0\})$.

1. Soit $z\in Z$ tel que $\nabla f(z)\neq 0$. Que dire de Z au voisinage de z ?
2. On suppose que Z est compacte non vide et que ∇f ne s'annule pas sur Z. Quelle est l'image de $z\in Z\mapsto\dfrac{\nabla f(z)}{\|\nabla f(z)\|}$?

Travaux dirigés 1 – Fonctions harmoniques

On note r_θ la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^2$ d'angle θ. Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est radiale si pour tout $\theta\in\mathbb{R}$ et tout $a\in\mathbb{R}^2$, $f(r_\theta(a))=f(a)$.

1. Montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est radiale si et seulement s'il existe une fonction $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=h(\sqrt{x^2+y^2})$. (Définir h à partir de la restriction de f à une demi-droite issue de O.)
2. Soit $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur h la fonction $f:(x,y)\mapsto h(\sqrt{x^2+y^2})$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
3. On suppose désormais $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est radiale si et seulement si $y\partial f/\partial x-x\partial f/\partial y=0$.
4. Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ radiales et harmoniques. (On rappelle que le laplacien en coordonnées polaires s'écrit $\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$.)

Travaux dirigés 2 – Équations aux dérivées partielles

Soit $\Omega=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. On cherche les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0. \tag{1}$$

On considère les sous-ensembles suivants de $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{f\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})\,|\,f\text{ est solution de (1)}\}\\ \Sigma_1 &= \{f\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})\,|\,\text{il existe }\alpha\in\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})\text{ telle que }f(x,y)=\alpha(xy)\}\\ \Sigma_2 &= \{f\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})\,|\,\text{il existe }\beta\in\mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})\text{ telle que }f(x,y)=x\beta(\tfrac{y}{x})\}.\end{aligned}$$

1. Montrer que Σ,Σ_1 et Σ_2 sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $\Sigma_1+\Sigma_2\subset\Sigma$.
3. On considère l'application Φ de Ω dans lui-même définie par
$$\Phi(x,y)=\left(xy,\frac{y}{x}\right).$$
Montrer que Φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de Ω, *i.e.* Φ est bijective et de classe $\mathcal{C}^\infty$ ainsi que Φ^{-1}.
4. Soit $g=f\circ\Phi^{-1}$. Calculer $\partial_{11}^2 f$ et $\partial_{22}^2 f$ en fonction des dérivées partielles de g.
5. On suppose désormais que $f\in\Sigma$. Montrer que g vérifie $\partial_{12}^2 g(u,v)=\dfrac{1}{2u}\partial_2 g(u,v)$ pour tout $(u,v)\in\Omega$.
6. On pose $h=\partial_2 g$ et pour tout $v\in]0,+\infty[$, $\varphi_v:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi_v(u)=h(u,v)$. Montrer que $\varphi_v(u)=C(v)\sqrt{u}$ où C est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
7. Montrer que $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

Travaux dirigés 3 – Le lemme de Poincaré

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $X:U\to\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$. On note $(X_1,\dots,X_n)$ les coordonnées de X.

1. Déterminer le gradient de la fonction $V:U\to\mathbb{R}$ donnée par
$$V(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\int_0^1 X_i(tx)dt.$$

2. Montrer que le champ X dérive d'un potentiel si et seulement si $\partial_i X_j = \partial_j X_i$ pour tous i, j.
3. Donner un exemple de champ de vecteurs (X, Y) de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vérifiant $\partial_x Y = \partial_y X$ qui ne dérive pas d'un potentiel. On pourra chercher une solution de la forme $(x, y) \mapsto \omega(x, y)(-y, x)$ où ω est une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{U}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une fonction $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = e^{i\alpha(x,y)}$.

Travaux dirigés 4 – Fonctions convexes

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f est convexe lorsque :

$$\forall\ x, y \in U,\ \forall\ t \in [0, 1],\ \ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe et de classe $\mathcal{C}^1$.
   (a) Montrer que tout point critique de f est un minimum global.
   (b) On suppose de plus f strictement convexe. Montrer que si f admet un minimum local, il est l'unique minimum local et qu'alors $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tous $(x, y) \in U$ on a : $f(y) \geqslant f(x) + \mathrm{d}f_x(y - x)$. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque $n = 2$. Que dire des points critiques de f ?
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable.
   (a) Montrer que f est strictement convexe si et seulement si $f(y) > f(x) + \langle \nabla f(x) | y - x \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ distincts.
   (b) On suppose f convexe. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
   $$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y) | x - y \rangle \geqslant 0.$$
   (c) On suppose réciproquement que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
   $$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y) | x - y \rangle \geqslant 0.$$
   Montrer que f est convexe. (On pourra étudier la monotonie de $t \mapsto f\big((1-t)x + ty\big)$.)
4. On suppose que f est convexe sur U.
   (a) Soient $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ et $t \in [0, 1]$ tel que $x - h \in U$ et $x + h \in U$. Montrer :
   $$(1+t)f(x) - tf(x-h) \leqslant f(x+th) \leqslant (1-t)f(x) + tf(x+h).$$
   (b) Montrer que f est continue (raisonner sur le cas $n = 2$ puis généraliser).

2 Calcul différentiel intrinsèque

Exercices d'application :

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la différentielle en M de l'application $f : M \mapsto M^p$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même.
2. Déterminer la différentielle de exp sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en 0 et I_n.
3. Déterminer la différentielle de $x \mapsto \|x\|_2$ lorsque $x \in E$ euclidien.
4. (Mines 2013) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ tels que pour tout $x \in [a, b]$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0$. Montrer que $f(a) = f(b)$.

Exercice 21 * : Étudier la différentiabilité des normes $\|\|_i$ sur $\mathbb{R}^2$ lorsque $i = 1, 2, \infty$. (Indication : dessiner le graphe de la fonction.)

Exercice 22 : Soit f une forme linéaire sur E espace euclidien. Montrer que $g : x \mapsto f(x)e^{-\|x\|^2}$ admet un maximum et un minimum.

Exercice 23 * : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que la restriction g de f à $S(0, 1)$ atteint un maximum en point x_0. Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0) \in \mathbb{R}x_0$

1. en considérant le chemin $t \mapsto x_0 + tv$;
2. en considérant $g(x) = f(x/\|x\|)$.

En déduire une nouvelle preuve du théorème spectral.

Exercice 24 * : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

1. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $g : x \mapsto f(x) + \langle x | v \rangle$ admet un minimum.
2. Montrer que ∇f est surjective.

Exercice 25 * : Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne naturelle. On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus F$ et on définit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \mapsto d(u, F)$.

1. Soit $u \in \Omega$ tel que f est différentiable en u. Calculer $\nabla f(u)$. Qu'en déduire ?

2. Inversement, soit $u \in \Omega$ tel que $\mathrm{d}(x, F)$ soit atteint en un unique x de Ω. Pour $y \in \Omega$, on note $A(y)$ l'ensemble des points de F qui réalisent la distance $\mathrm{d}(y, F)$.
   (a) Montrer $\mathrm{d}(x, A(u+h))$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
   (b) Montrer que f est différentiable en u.

Exercice 26 * : Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On définit $f : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\langle u(x)|x\rangle}{\|x\|^2}$. Calculer la différentielle de f et en déduire une nouvelle preuve du théorème spectral.

Exercice 27 ** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\chi_A = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ son polynôme caractéristique. Si I est une partie non vide de $[\![1, n]\!]$, on note $\Delta_I = \det(A_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$. En considérant $A + \mathrm{Diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, montrer que $a_{n-k} = (-1)^k \sum_{I\subset[\![1,n]\!],\ \mathrm{Card}\, I = k} \Delta_I$.

Exercice 28 ** : On considère l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$, $M \mapsto (\mathrm{Tr}\, M, \mathrm{Tr}\, M^2, \dots, \mathrm{Tr}\, M^n)$.

1. Montrer que le sous-ensemble formé des matrices de rang $\geqslant k$ est un ouvert de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et que celui formé des matrices de rang $\leqslant k$ est un fermé de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. (On pourra utiliser les matrices de Gram et commencer par démontrer que $(u_1, \dots, u_r)$ est libre si $\mathrm{Gram}(u_1, \dots, u_r)$ est inversible.)
2. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le rang de $df(M)$?
4. Montrer que l'ensemble des matrices dont le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 29 ** : Soit $r > 0$ et $U = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) | \mathrm{Spec}(M) \subset D(0, r)\}$. On admet que U est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $M \in U$,

$$\exp M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{re^{i\theta}} (re^{i\theta} I_n - M)^{-1} re^{i\theta} d\theta.$$

En déduire que exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 30 ** : Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ et Σ la surface représentative de f. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ∇f pour que la droite normale à $T_a\Sigma$ en a contienne 0 pour tout $a \in \Sigma$. Décrire Σ.

Exercice 31 ** : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et Σ la surface représentative de f. Donner une condition nécessaire et suffisante sur ∇f pour que la droite normale à $T_a\Sigma$ en a contienne coupe l'axe Oz pour tout $a \in \Sigma$. Que dire alors des lignes de niveaux de f et des symétries de Σ ?

Exercice 32 ** : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $A = \mathrm{Jac}_0 f$. On suppose que toutes les valeurs propres de A sont de modules < 1.

1. Montrer qu'il existe une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$.
2. Montrer l'existence d'un voisinage V de 0 tel que $\lim_k f^k(x) = 0$ pour tout $x \in V$.

Travaux dirigés 5 – L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie

1. Montrer qu'une partie compacte de $GL_n(\mathbb{R})$ stable par produit est un sous-groupe. (Considérer la suite $(M^n)_{n\geqslant 1}$.)
2. Algèbre de Lie : propriétés algébriques.
   Une algèbre de Lie est un espace vectoriel V muni d'une loi de composition interne bilinéaire alternée, généralement notée $(u, v) \mapsto [u, v]$ et appelée crochet, et vérifiant pour tous $u, v, w \in V$
   $$[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0,$$
   connue sous le nom d'identité de Jacobi.
   (a) Montrer que $\mathcal{G} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\ \mathrm{Tr}\, M = 0\}$ est une algèbre de Lie pour le crochet $[A, B] = AB - BA$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni du produit vectoriel usuel est une algèbre de Lie.
   (c) Montrer que l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du crochet est une algèbre de Lie. Pourquoi ceci apporte-t-il une nouvelle solution à la question précédente ?

On s'intéresse maintenant à certains sous-groupes fermés de $GL_n(\mathbb{R})$, appelés groupes de Lie. Si G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on appelle algèbre de Lie de G l'espace tangent à G en I_n. On va voir que ce nom est légitime.

3. Soit $G = GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Quelle est son algèbre de Lie ?
4. Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Un bon chemin est une application $C : t \mapsto (c_{i,j}(t))_{i,j}$ dérivable définie sur un voisinage $]-\varepsilon, \varepsilon[$ de 0 et à valeurs dans G telle que $C(0) = I_n$. Par définition, l'algèbre de Lie $\mathcal{H}$ du groupe G est l'ensemble des dérivées en 0 des bons chemins, soit encore
   $$\mathcal{H} = \{C'(0) \,|\, C \text{ est un bon chemin}\}.$$
   (a) Soit C_1, C_2 deux bons chemins. Montrer que $C_1C_2 : t \mapsto C_1(t)C_2(t)$ est un bon chemin et calculer sa dérivée en 0. En déduire que $\mathcal{H}$ est stable par addition.

(b) Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Lie pour le crochet défini à la question (2a). (Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $A \in G$ et tout $M \in \mathcal{H}$, $AMA^{-1} \in \mathcal{H}$ – un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé.)

5. Dans cette question, $G = SL_n(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que G est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Est-il fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Est-il compact ?
   (b) Montrer que si $A \in \mathcal{H}$, alors $t \mapsto e^{tA}$ est un bon chemin.
   (c) Montrer que $\mathcal{H}$ est l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ introduite à la question (2a). (Indication : on pourra utiliser les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.)
6. Déterminer l'algèbre de Lie de $SO(n)$ et de $O(n)$.
7. Soit T l'ensemble des matrices triangulaires supérieures possédant seulement des 1 sur la diagonale. Montrer que T est un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. Déterminer son algèbre de Lie $\mathcal{N}$. Montrer que $\exp : \mathcal{N} \to T$ est un homéomorphisme (*i.e.* est un bijection continue de récipoque continue – utiliser la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$).
8. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme dérivable 2π-périodique. On note H l'image de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que H est un sous-groupe compact de $SL_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que les valeurs propres de tout $M \in H$ sont de module 1.
   (c) Montrer que φ est de la forme $t \mapsto e^{tM}$.

Travaux dirigés 6 – Une nouvelle preuve du théorème fondamental de l'algèbre

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière complexe de rayon de convergence infini qui ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. On pose $g(z) = 1/f(z)$ et pour $r \geqslant 0$, $f_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ et $g_r(\theta) = g(re^{i\theta})$.

1. (Préliminaires préhilbertiens) Soit E l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Il s'agit d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc aussi d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (a) Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$. Montrer que $\|\|_2$ est une norme euclidienne sur E. Quel est le produit scalaire associé ?
   (b) Montrer que la famille $(e^{ipt}, ie^{iqt})_{p,q\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthogonale totale dans E.
   (c) On note P_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par la famille $(e^{ikt})_{-n\leqslant k\leqslant n}$ où $n \in \mathbb{N}$. Si $\varphi \in E$, on note $S_n(\varphi)$ le projeté orthogonal de φ sur P_n. Montrer que la suite de terme général $\|\varphi - S_n(\varphi)\|_2$ tend vers 0.
2. (Théorème de Dirichlet) Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique, on appelle coefficient de Fourier (exponentiel) les $c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ où $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Exprimer $S_n(\varphi)$ en fonction des $c_k(\varphi)$.
   (b) Montrer que $c_n(\varphi)$ tend vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$.
   (c) On suppose φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $c_n(\varphi') = inc_n(\varphi)$.
   (d) On suppose φ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la famille $(c_n(\varphi)e^{int})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que $\varphi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\varphi)e^{int}$.
3. Montrer que l'application $(x, y) \mapsto f(x + iy)$ définie sur $D(0, R)$ et à valeurs complexes est harmonique, *i.e.* de Laplacien nul.
4. Montrer que pour tout $r > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t$.
5. Exprimer $f_r'(\theta)$, $g_r'(\theta)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}f_r(\theta)$ en fonction de $f'(re^{it})$ puis $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}g_r(\theta)$ en fonction de $g_r'(\theta)$.
6. Montrer que $c_n(g_r)r^{-n}$ ne dépend pas de r. On note γ_n cette valeur.
7. Montrer que γ_n est nul si $n < 0$. En déduire que g est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
8. En déduire une nouvelle preuve du théorème fondamental de l'algèbre.

Pour se détendre

Une fonction constante et la fonction $x \mapsto e^x$ se promènent tranquillement dans la rue. Soudain la fonction constante aperçoit un opérateur différentiel qui approche et elle se sauve. e^x la rattrape et lui demande ce qui lui prend.

« Tu ne te rends pas compte ! Si l'opérateur différentiel me rencontre, il me dérivera et il ne restera rien de moi... ! »

« Ah ! Ah ! », dit e^x, « il ne m'inquiète pas, moi, la dérivation ne me fait pas peur ! »Et il poursuit sa route. Au bout de quelques mètres, il rencontre l'opérateur différentiel.

e^x : « Salut, je suis $x \mapsto e^x$! »

L'opérateur différentiel : « Salut, je suis $\frac{\partial}{\partial y}$... »

Indications

Exercice 3.

1. Utiliser l'égalité des accroissements finis.
2. Utiliser la formule de Taylor adéquate.
3. Se ramener à une intégrale sur $[0,1]$.
4. Astuce : utiliser une formule de trigonométrie (hyperbolique) pour se ramener à une fonction d'une variable.

Exercice 5.

1. Pour le sens réciproque, $\varphi(t) = f(tx)$ vérifie l'équation différentielle $y' = \dfrac{k}{t}y$.

Exercice 6. Passer en coordonnées polaires.

Exercice 10. Non : régionner le plan en fonction du signe de f.

Exercice 11. Utiliser la fonction $t \mapsto f(tx)$.

Exercice 23. On peut considérer des chemins dérivables c passant en x_0 au temps $t = 0$ et dériver $f(c(t))$. On peut aussi homogénéïser f et poser $g(x) = f(x/\|x\|)$, puis calculer sa différentielle.

Exercice 32.

1. Chercher une norme de la forme $M \mapsto \|AMA^{-1}\|$.
2. Comme en dimension 1, utiliser un théorème des accroissements finis.

Solutions

Exercice 19. Soit $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{Z(f)}$. L'application $t \mapsto f\big((1-t)x_0 + tx\big)$ est polynomiale à une variable avec une infinité de racines, car nulle pour t assez petit. Elle est donc nulle, en particulier en $t = 1$.

1. C'est un fermé d'intérieur vide si $f \neq 0$. Dans ce cas, si $fg = 0$, on a g nulle sur l'ouvert dense $Z(f)^c$, *i.e.* $Z(g) \supset Z(f)^c$. Mais alors, $Z(g) = 0$ car c'est un fermé.
2. Soit σ une permutation de $[\![1, p^2]\!]$ vers $[\![1, p]\!]^2$. Il y en a $(p^2)!$. L'application polynomiale $f_\sigma : \mathbb{R}^{p^2} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p^2} \mapsto (x_{\sigma(i)})$ est non nulle. D'où $Z(f_\sigma)^c$ est un ouvert dense, ainsi que l'intersection finie des $Z(f_\sigma)^c$.
3. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La condition $\chi_M = \mu_M$ équivaut à $\deg M = n$, *i.e.* à ce qu'on puisse compléter $(I_n, M, \dots, M^{n-1})$ en $(I_n, \dots, M^{n-1}, A_1, \dots, A^{n^2-n})$ base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Choisissons $M = J$ nilpotente d'indice n, de sorte que $\deg \mu_J = n$. On fixe ensuite les A_j de sorte que
$$\det_{\mathcal{B}}(I_n, J, \dots, J^{n-1}, A_1, \dots, A^{n^2-n}) \neq 0.$$
L'application polynomiale non-nulle
$$M \mapsto \det_{\mathcal{B}}(I_n, J, \dots, J^{n-1}, A_1, \dots, A^{n^2-n})$$
est non-nulle sur une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de sorte que pour tout M dans cette partie, $(I_n, M, \dots, M^{n-1})$ est libre.