Exercices d'application : Soit E euclidien.

1. Parmi les endomorphismes orthogonaux, lesquels sont symétriques (resp. diagonalisables) ?
2. Que dire des coefficients diagonaux d'une matrice symétrique positive ?
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $A^p \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
4. Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que $\operatorname{Ker} u \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} u$.
5. Résoudre dans $M_n(\mathbb{R})$ l'équation $A^tAA = I_n$.
6. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. On suppose qu'il existe $x \in E$ tel que $\langle x|u(x)\rangle = 0$. Montrer que $u(x) = 0$.
7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$.
8. Soit λ une valeur propre réelle de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que λ est nul.

Exercice 1 : Soit $M = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i^2$.

Exercice 2 – Topologie de $\mathcal{S}^{++}(E)$: Soit E euclidien.

1. Montrer que $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ sont convexes.
2. Montrer que $\mathcal{S}^+(E)$ est fermé dans $\mathcal{S}(E)$.
3. Montrer que $\mathcal{S}^{++}(E)$ est dense dans $\mathcal{S}^+(E)$.
4. (**) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $A^{(i)}$ la matrice extraite de A en gardant les i premières lignes et colonnes. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det A^{(i)} > 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire que $\mathcal{S}^{++}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{S}^+(E)$ et de $\mathcal{S}(E)$.

Exercice 3 ** : Déterminer la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ constitué de matrice toutes diagonalisables.

Exercice 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable.
2. On suppose que $\dim \operatorname{Ker} A^2 = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A^5 + A^3 + A = 3\mathrm{I}_n$. Que peut-on dire de A ?

Exercice 5 : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une solution non nulle du système différentiel $X' = AX$. Montrer que $t \mapsto \|f(t)\|$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 * : Soit $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Com} M \in S_n^+(\mathbb{R})$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7 * : Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $x \notin \operatorname{Ker} S$. Étudier la convergence de la suite $\left(\dfrac{S^n(x)}{\|S^n(x)\|}\right)_n$.

Exercice 8 ** : Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $f : t \mapsto e^{tA} - e^{tB}$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que $A = B$.

Exercice 9 ** : Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^tAA = {}^tBB$.

1. On suppose A inversible. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $B = PA$.
2. Montrer le résultat précédent sans hypothèse sur A.

Exercice 10 * : Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $M_0 = I_n$ et, pour $p \in \mathbb{N}$, $M_{p+1} = \dfrac{1}{2}(M_p + M_p^{-1}A)$. La suite $(M_p)_p$ converge-t-elle ? Si oui, vers quelle limite ?

Exercice 11 * : Soit $(A_i)_i$ une famille d'éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ commutants deux à deux. Montrer qu'il existe une matrice symétrique A et des polynômes P_i tels que pour tout i, $A_i = P_i(A)$.

Exercice 12 *– Mines 2017 : Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique scindé et a son endomorphisme canoniquement associé. On pose $B = {}^tAA$.

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de a est triangulaire supérieure.
   On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les valeurs propres de A, $\beta_1, \dots, \beta_n$ celles de B avec $|\alpha_1| \leqslant |\alpha_2| \leqslant \dots \leqslant |\alpha_n|$ et $|\beta_1| \leqslant \dots \leqslant |\beta_n|$.
2. Montrer qu'il existe un plan stable par a sur lequel a induit un endomorphisme de valeurs propres α_{n-1} et α_n.
3. Montrer que $\Delta = \displaystyle\sup_{\|X\|=\|Y\|=1} \det \begin{pmatrix} \langle AX|AX\rangle & \langle AX|AY\rangle \\ \langle AX|AY\rangle & \langle AY|AY\rangle \end{pmatrix} \geqslant \alpha_{n-1}^2\alpha_n^2$.

Exercice 13 *– Mines 2017 : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit $V = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) |\, \operatorname{tr}(AX) = 0\}$.

1. Quelle est la dimension de $V \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$?
2. Quelle est la dimension de $V \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$?
3. Déterminer les valeurs propres de $X \mapsto \operatorname{tr}(AX)A - (\operatorname{tr} A^2)^tX$.

Exercice 14 *– Mines 2017 : Soit E un espace euclidien et $a, b \in E$ non nuls et orthogonaux. Soit $V = \{f \in \mathcal{S}(E) | f(a) = 0\}$.

1. Montrer que $f \mapsto \sqrt{\operatorname{tr} f^2}$ est une norme sur $\mathcal{S}(E)$.
2. Quelle est la nature de V ? Sa dimension ?
3. Déterminer $V^\perp$.
4. Déterminer $f_0 \in \mathcal{S}(E)$ tel que $f_0(a) = b$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(E)$, $f(a) = b$ implique $\|f_0\| \leqslant \|f\|$. Déterminer $\|f_0\|$ et les éléments propres de f_0.

Exercice 15 (**) :

1. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre positif. (On pourra montrer que AB est symétrique pour un produit scalaire adéquat.)
2. Soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre positif.

Exercice 16 *– Une nouvelle preuve du théorème spectral : On se propose de démontrer par récurrence le théorème spectral. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose le théorème vrai au rang $n-1$.

1. Montrer que M est orthogonalement semblable à une matrice de la forme
$$S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix}$$
où $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1}$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique P de S.
3. On suppose dans cette question que les $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont distincts et les a_i tous non nuls. Étudier l'alternance de signe de P en $-\infty < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < +\infty$.
4. Montrer que les polynômes scindés de $\mathbb{R}_n[X]$ forment un fermé.
5. En déduire par récurrence le théorème spectral.

Exercice 17 **– La preuve de Lagrange du théorème spectral : Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, quitte à ajouter λI_n à M, les solutions complexes de $X'' = -MX$ sont bornées. (Considérer l'énergie mécanique.)
2. Soit U_0 un vecteur propre de M pour la valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que la solution du problème de Cauchy $X'' = -MX$, $X(0) = U_0$, $X'(0) = 0$ reste dans un plan (complexe).
3. En se ramenant à un système 2×2, montrer que λ est réel positif.

Travaux dirigés 1 – Le théorème du minimax

♡ Soit E euclidien de dimension n, $f \in \mathcal{S}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ et e_i vecteurs propres unitaires de f associé à λ_i tels que $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée.

1. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $E_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ et $F_k = \operatorname{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$. Caractériser λ_k à partir de l'application induite de f sur E_k et F_k.
2. Soit A_k l'ensemble des sous-espaces de dimension k de E. Montrer que
$$\lambda_k = \min_{F \in A_k} \left(\max_{x \in F,\, \|x\|=1} \langle f(x) | x \rangle \right) = \max_{F \in A_{n-k+1}} \left(\min_{x \in F,\, \|x\|=1} \langle f(x) | x \rangle \right).$$
3. Soient $g \in \mathcal{S}(E)$ de valeurs propres $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$. On suppose que $\langle f(x)|x\rangle \leqslant \langle g(x)|x\rangle$ pour tout $x \in E$. Montrer que $\lambda_k \leqslant \mu_k$.
4. Soient $g \in \mathcal{S}(E)$ de valeurs propres $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda_k - \mu_k| \leqslant |||f - g|||$. Que peut-on en déduire pour la fonction qui à un endomorphisme symétrique associe sa k^{e} valeur propre ?

Travaux dirigés 2 – Matrices et endomorphismes antisymétriques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un espace euclidien de dimension n. Un endomorphisme u de E est antisymétrique si pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x)|y\rangle = -\langle x|u(y)\rangle$.

1. Caractériser les endomorphismes antisymétriques par leur matrice dans une base orthonormée.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est antisymétrique si et seulement si pour tout $x \in E$, on a $\langle f(x)|x\rangle = 0$.
3. Montrer que si f est antisymétrique et que F est un sous-espace vectoriel de E stable par f, alors $F^\perp$ est aussi stable par f.
4. Caractériser géométriquement les endomorphismes antisymétriques lorsque $\dim E = 1, 2$ ou 3. (On fera intervenir le produit vectoriel.)
5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est une matrice diagonale par bloc dont les blocs diagonaux sont soit des zéros, soit de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{smallmatrix}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Travaux dirigés 3 – Décomposition en valeurs singulières

Soit E euclidien et $f \in GL(E)$. ♡

1. Montrer qu'il existe une base orthonormée de E transformée par f en une base orthogonale. (Indication : considérer $(f(x)|f(y))$.)
2. Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $U, V \in O(n)$ et $D \in GL_n(\mathbb{R})$ diagonale vérifiant $D_{i,i} \geqslant D_{i+1,i+1} > 0$ si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ telles que $M = UDV$. Montrer que D est uniquement déterminée par M.

3. Montrer que le résultat précédent est encore vrai si M n'est pas inversible.
4. En déduire l'existence de la décomposition polaire.
5. Réciproquement, déduire la décomposition en valeurs singulières de la décomposition polaire.

Indications

Exercice 1. Utiliser le théorème spectral.

Exercice 2. 4. Pour le sens difficile, considérer il existe un plan sur lequel $x \mapsto q(x) = \langle x|Ax\rangle$ est strictement négatif $\forall x \neq 0$. Considérer q sur $\mathrm{Vect}(e_1;\dots,e_k)$ et augmenter k.

Exercice 3. Pour majorer la dimension, considérer le sous-espace des matrices triangulaires supérieures (ou antisymétriques).

Exercice 4. C'est un exercice classique de réduction.

Exercice 5. On a une expression de X, dont la norme euclidienne est calculable.

Exercice 6. Pour le sens direct, déformer légèrement M de sorte qu'elle soit définie positive. Pour la réciproque, commencer par déterminer le rang de $\mathrm{Com}\, M$ en fonction de M.

Exercice 7. Décomposer x en somme de vecteurs propres.

Exercice 8. Choisir x vecteur propre de A puis le décomposer x en somme de vecteurs propres pour B.

Exercice 9. 1. On n'a pas le choix pour P.

2. Considérer les restrictions à $\mathrm{Ker}\, A$ et son orthogonal.

Exercice 10. Diagonaliser. On reconnaît une méthode bien connue.

Exercice 11. C'est un problème de réduction simultanée. Pour l'existence de A et de P_i, il existe beaucoup de possibilités.

Exercice 16. 2. On trouve par récurrence $P = -\sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \prod_{k=1,\, k\neq i}^{n-1} (X-\lambda_k) + \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$.

Solutions

Exercice 9. 1. On pose $P = BA^{-1}$. Alors ${}^tPP = {}^tA^{-1t}BBA^{-1} = I_n$, donc $P \in O_n(\mathbb{R})$.

2. Soient a (resp b) canoniquement associées à A et B. Remarquons que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} {}^tAA$ (déjà vu), donc $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$. En particulier, $\operatorname{Ker} A^\perp$ est de même dimension que $\operatorname{Im} A$. On a de plus en considérant ${}^tX^tAAX$ que $\langle a(y)|\, a(y)\rangle = \langle b(y)|\, b(y)\rangle$ pour tout y.

   Soit $\widetilde{a} : (\operatorname{Ker} a)^\perp \to \operatorname{Im} a$; c'est un isomorphisme par le théorème du rang. On pose $\varphi(x) = b \circ \widetilde{a}^{-1}(x)$ si $x \in (\operatorname{Ker} a)^\perp$. On choisit une isométrie u entre $\operatorname{Ker} a$ et $\operatorname{Im} b^\perp$ (ils ont même dimension) et on pose $\varphi(x) = u(x)$ si $x \in \operatorname{Ker} a$.

   On a bien $b = \varphi \circ a$: c'est clair par définition sur $(\operatorname{Ker} a)^\perp$ et vrai aussi sur $\operatorname{Ker} a$ car $\operatorname{Ker} a = \operatorname{Ker} b$.

   Montrons que $\varphi \in O(\mathbb{R}^n)$. Si $x \in \operatorname{Ker} a^\perp$, $\|\varphi(x)\|^2 = \|b \circ \widetilde{a}^{-1}(x)\|^2 = \|a \circ \widetilde{a}^{-1}(x)\|^2 = \|x\|^2$. Si $x \in \operatorname{Ker} a$, alors $\|\varphi(x)\|^2 = \|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ car u est une isométrie. Enfin dans le cas général, $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker} a^\perp$, $x_2 \in \operatorname{Ker} a$ et

$$\begin{aligned} \|\varphi(x)\|^2 &= \|\varphi(x_1)\|^2 + \|\varphi(x_2)\|^2 \qquad \text{(Pythagore, car } \varphi(x_1) \perp \varphi(x_2)\text{)} \\ &= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x\|^2. \end{aligned}$$

Exercice 17. 1. On définit (énergie mécanique)

$$E(t) = {}^t\overline{X'(t)}X'(t) + {}^tX(t)MX(t) = \|X'(t)\|^2 + \langle X(t)|MX(t)\rangle.$$

   En dérivant, $E'(t) = 0$. Donc $t \mapsto E(t)$ est constante.

   La fonction sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $X \neq 0$ par $X \mapsto {}^t\overline{X}MX/\|X\|^2$ est continue sur la sphère unité donc minorée par une constante β. Si $\beta < 0$, en remplaçant M par $M - 2\beta I_n$, on a ${}^t\overline{X}MX \geqslant |\beta|\|X\|^2$. Donc si une trajectoire prend des valeurs arbitrairement grandes en norme, E aussi, ce qui est absurde.

2. On rappelle qu'on s'est limité au cas où les valeurs propres de M sont de parties réelles strictement positives. La solution X du problème de Cauchy $X'' = -MX$, $X(0) = U_0$, $X'(0) = 0$ vérifie aussi que $Z = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix}$ est solution de $Z' = AZ$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -M & 0 \end{pmatrix}$. Le plan $V = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$ est stable par A si $e_1 = \begin{pmatrix} U_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ U_0 \end{pmatrix}$ car $Ae_1 = -\lambda e_2$ et $Ae_2 = e_1$. La solution étant e^tAe_1, elle reste dans V.

3. Si $X(t) = x_1(t)e_1 + x_2(t)e_2$, on a $x_j'' = -\lambda x_j$. Soit $\alpha = a + ib$ une racine carrée de $-\lambda$, l'autre étant $-a - ib$. Les solutions de $x'' = -\lambda x$ sont les $Ae^{\alpha t} + Be^{-\alpha t}$.

   On peut supposer qu'un des x_j est non identiquement nul. Si $a > 0$, en faisant tendre t vers $+\infty$ puis vers $-\infty$, on trouve que $B = 0$ puis $A = 0$,ce qui est absurde. De même si $a < 0$. Donc $a = 0$ et $\lambda > 0$. Ainsi, M admet une valeur propre réelle. On conclut comme d'habitude.

(Méthode plus simple (Boissin-Marcin) : la solution de la question 2 est $t \mapsto \cos(\alpha t)U_0$; on conclut comme dans 3, en économisant la méthode de l'espace des phases.)

Exercice 3. (TD)

1. Matriciellement, dans une *bon* $\mathcal{B}$ fixée, on veut $(u_i)_i$ *bon* telle que $u_i^TM^TMu_j = 0$ si $i \neq j$. Mais $M^TM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On prend pour (u_i) une *bon* de diagonalisation. On note $\widetilde{\varepsilon}_i = Mu_i$. Alors $(\widetilde{\varepsilon}_i)_i$ convient.
2. On note $\varepsilon_i = \alpha_i\widetilde{\varepsilon}_i$ où $\alpha_i = \|\widetilde{\varepsilon}_i\|$ et $\varepsilon_i = \widetilde{\varepsilon}_i/\alpha_i$. Soit de plus $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\varphi(\varepsilon_i) = u_i$ pour tout i. On peut supposer que $\alpha_i \geqslant \alpha_{i+1}$ si $i \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi, $\varphi \circ f$ envoie u_i sur α_iu_i. De plus, $\varphi \in O(E)$ car envoie une *bon* sur une *bon*. Alors, en notant $\mathcal{E} = (\varepsilon_i)_i$:

$$\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(\varphi \circ f) = (\operatorname{Mat}_\mathcal{B}\varphi)\, P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}\, (\operatorname{Mat}_\mathcal{E} f)\, P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = UDV.$$

   On a unicité de D car les coeffficients diagonaux sont les racines des valeurs propres, classées par ordre décroissant, de $M^TM = V^TM^TMV$.
3. Montrons l'existence. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une suite (M_k) de matrices inversibles de limite A. On écrit $M_k = U_kD_kV_k$. Par compacité de $O_n(\mathbb{R})$, et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (U_k) et (V_k) convergent vers P et Q dans $O_n(\mathbb{R})$ respectivement. Mais alors $D_k = U_k^TM_kV_k^T$ converge vers P^TAQ^T. Sa limite Δ est diagonale à termes diagonaux décroissant. On a bien $A = P\Delta Q$. On a encore unicité de Δ pour la même raison que précédemment.
4. On a $M = (UV)(V^TDV)$ avec $UV \in O_n(\mathbb{R})$ et $V^TDV \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
5. Si $M = \Omega S$, $S = V^TDV$ ce qui suffit.