Exercices d'application :

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels. Montrer l'inégalité
$$(x_1 + \cdots + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$
2. Soit E euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormée de E. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle e_i | f(e_i)\rangle$?
3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E euclidien. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. Quelles inclusions subsistent si on ne fait plus d'hypothèse de dimension ?
4. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
   (a) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur l'hyperplan H d'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Calculer la distance entre le vecteur $(1, 2, 3, 4)$ et H.
   (b) Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à H.
   (c) Donner la matrice de la projection orthogonale sur le sous-espace d'équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$.
5. Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, 1)$, $u_2 = (-2, 0, 1, 1)$, $u_3 = (0, 1, 0, 1)$. Soit $H = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Montrer que H est un hyperplan et en donner une équation.
   (b) Donner un vecteur normal unitaire à H.
   (c) Donner les matrices dans la base canonique de la projection orthogonale sur H et de la symétrie orthogonale par rapport à H.
6. Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. On pose pour $f, g \in E$:
$$\langle f|g\rangle = \int_0^\pi f(\cos\theta)g(\cos\theta)d\theta.$$
   Montrer que $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E pour lequel la famille des polynômes de Tchebitchev est orthogonale.
7. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et donner une base orthonormée de E. En déduire le minimum de la fonction de deux variables réelles $(a, b) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
8. Soit E euclidien de dimension n. Soit $x, y \in E$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur x et y existe-t-il une rotation envoyant x sur y ?
9. Soit E préhilbertien réel.
   (a) Donner un exemple de sous-espace F tel que $(F^\perp)^\perp \neq F$.
   (b) Soient F, G deux sous-espaces tels que $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$. Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.
   (c) Soit F un sous-espace de E. Montrer que $F^\perp$ est fermé.
   (d) (***) Donner un exemple de E et F tel que F est fermé mais $F \oplus F^\perp \neq E$.

Exercice 1 – Sur les projections orthogonales :

1. Soit p une projection de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $|||p||| \leqslant 1$. En déduire que les projecteurs orthogonaux de E forment un compact. Est-ce le cas pour les projecteurs de E ? ♡
2. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note p_F et p_G les projections orthogonales sur F et sur G. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{Id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

Exercice 2 : Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $(a_n)_n$ une suite à valeurs dans $[0, 1]$. On pose pour $f, g \in E$
$$\langle f|g\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(a_k)g(a_k).$$
Justifier la définition et montrer que $\langle \cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E si et seulement si $(a_n)_n$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 3 ** : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associée à A. Existe-t-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel f est une rotation ? Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} \pi & e \\ \sqrt{2} & \gamma \end{pmatrix}$.

Exercice 4 * : Soient $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives telles que $fg \geqslant 1$. Montrer que
$$\int_0^1 f \int_0^1 g \geqslant 1.$$
Cas d'égalité ?

Exercice 5 * – Générateurs de $O(E)$: Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soient $x, y \in E$ distincts non nuls et de même norme. Montrer qu'il existe une unique réflexion qui envoie x sur y.

2. Soit $f \in O(E)$ et $r = n - \dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$. Montrer par récurrence sur r que f est un produit d'au plus r réflexions. Application : montrer que $O_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6 * – Inégalité d'Hadamard : Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On note Det le déterminant dans une base orthonormée directe. (Donc $\operatorname{Det}(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n]$ est le produit mixte.) Montrer que

$$|\operatorname{Det}(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant \|x_1\| \cdots \|x_n\|.$$

(Indication : orthonormaliser $(x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ par le procédé de Schmidt et remarquer une propriété de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$; déterminer en particulier les coefficients diagonaux.)

Exercice 7 – Mines : Soit $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$.

1. Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))dt$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que les sous-espaces $V = \{f \in E \,|\, f = f''\}$ et $W = \{f \in E \,|\, f(0) = f(1) = 0\}$ sont supplémentaires et orthogonaux. Expliciter la projection orthogonale sur V.
3. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on pose $E_{\alpha,\beta} = \{f \in E | f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Déterminer $\displaystyle\inf_{f \in E_{\alpha,\beta}} \int_0^1 (f(x)^2 + f'(x)^2)\mathrm{d}x$.

Exercice 8 * : Soit C un réel positif. On munit $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des deux normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ usuelles. Soit E un sous-espace vectoriel tel que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$.

1. Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille orthonormée dans E. Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$ et tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\sum_{i=1}^n f_i^2(x) \leqslant C\sqrt{\sum_{i=1}^n f_i^2(x)}.$$
(On pourra considérer $a_i = f_i(x)$.)
2. En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 9 ** : Soient E et F deux espaces euclidiens de dimensions respectives n et m, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On appelle *pseudo-solution* de l'équation $u(x) = b$ (appelée $(*)$) tout vecteur $x \in E$ minimisant $\|u(x) - b\|$.

1. Caractériser géométriquement l'ensemble S des pseudo-solutions de $(*)$.
2. Montrer que parmi toutes les pseudo-solutions, il en existe une unique de norme minimale. On la note $u^+(b)$. Caractériser géométriquement $u^+(b)$.
3. Montrer que l'application $u^+ : F \to E$ est linéaire. Déterminer son image et son noyau.
4. Caractériser géométriquement $u \circ u^+$ et $u^+ \circ u$. En déduire que $u^+ \circ u \circ u^+ = u^+$ et que $u \circ u^+ \circ u = u$.

Exercice 10 ** : Soit $G = \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}) \cap SO(3)$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$.
2. Reconnaitre en G le groupe des isométries directes d'un cube.
3. On note $\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ l'ensemble des quatres diagonales du cube précédent. Montrer que l'application $G \to \operatorname{Bij}(\mathcal{D})$, $g \mapsto g_{|\mathcal{D}}$ est un isomorphisme de groupe. En déduire que G est isomorphe à S_4.

Exercice 11 *– Matrice circulante :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour que M soit la matrice d'une rotation r dans une base orthonormée.
2. Montrer que M appartient à $SO(3)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in [0, 4/27]$ tel que a, b, c sont les racines de $X^3 - X^2 + \alpha$.

Exercice 12 * : Montrer que $SO(n)$ est connexe par arcs. Le groupe $O(n)$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 13 * : Soit $M \in O(p, \mathbb{R})$. Déterminer la limite de la suite $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} M^k)_n$.

Exercice 14 * : Montrer que l'application $\exp : \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \to SO(n)$ est surjective.

Travaux dirigés 1 – Produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ♡

On considère l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ dans $\mathbb{R}$ donnée par $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}({}^tAB)$.

1. Montrer que cette application est un produit scalaire, pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Est-ce une norme subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^n$?
2. Montrer que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale, $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$ et que $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.
3. Montrer que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $|\operatorname{Tr} A| \leqslant \sqrt{n}\|A\|$.

4. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice orthogonale. Montrer que
$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} \right| \leqslant n.$$
Cas d'égalité ?
5. Quel est l'orthogonal de l'espace $\mathcal{S}$ des matrices symétriques ? En déduire
$$\inf_{(m_{i,j}) \in \mathcal{S}} \sum_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$$
où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fixée.
6. On suppose n pair. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice de rotation. (Indication : utiliser la matrice diagonale par blocs de la forme R_θ.)
7. On suppose n impair. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient une matrice de rotation.

♡ **Travaux dirigés 2** – Matrices de Gram

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E préhilbertien réel et F un sous-espace de dimension n les contenant. On appelle *matrice de Gram* de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ la matrice $G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i \mid x_j \rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée si et seulement si $\det G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. (Utiliser une combinaison linéaire des colonnes.)
2. Montrer que
$$\det G(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{Det}(x_1, \ldots, x_n)^2.$$
(On pourra introduire la matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans une base orthonormée ainsi que sa transposée. Noter que la définition de Det pose problème. . .) On retrouve en particulier le résultat précédent.
3. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que l'ensemble des p-uplets $(u_1, \ldots, u_p) \in V^p$ formant une famille libre est un ouvert de V^p.
4. Soit $x \in E$. On suppose $(x_1, \ldots, x_n)$ libre. Montrer que
$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{\det G(x, x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}.$$
5. Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ deux familles de vecteurs de F. Montrer que $G(u_1, \ldots, u_p) = G(v_1, \ldots, v_p)$ si et seulement s'il existe $f \in O(F)$ tel que $v_k = f(u_k)$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant p$. Interprétation matricielle : soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. À quelle condition a-t-on ${}^tAA = {}^tBB$?

Travaux dirigés 3 – Le théorème de Maschke

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et G un sous-groupe fini de $GL(E)$ de cardinal n.

1. Soit $\langle | \rangle$ un produit scalaire sur E. On pose pour $x, y \in E$
$$(x|y) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \langle g(x) | g(y) \rangle.$$
Montrer que $(|)$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que les éléments de G sont orthogonaux pour $(|)$. (Remarquer que $h \mapsto h \circ g$ est une bijection de G si $g \in G$.)
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de F dans E stable par tous les éléments de G.
4. Soit $p = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{g \in G} g$. Montrer que p est un projecteur orthogonal pour $(|)$.
5. Montrer que pour tout $g \in G$, on a $p \circ g = g \circ p = p$. En déduire que $\operatorname{Im} p = \cap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g - \mathrm{id}_E)$.

Travaux dirigés 4 – Projection sur un convexe fermé

Soit E un espace euclidien et $C \subset E$ un convexe fermé non vide.

1. Établir l'égalité de la médiane : si $u, v, w \in E$ et $x = (v + w)/2$, alors
$$\|v - u\|^2 + \|w - u\|^2 = 2\|u - x\|^2 + \frac{1}{2}\|v - w\|^2.$$
2. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe un unique $h \in C$ tel que $\|x - h\| = d(x, C)$. Le vecteur h est le projeté orthogonal de x sur C. On le note $p_C(x)$.
3. Soit $x \in C$ et $a \in E$. Montrer que $\langle p_C(a) - a | p_C(a) - x \rangle \leqslant 0$.
4. Soit $a \notin C$. Montrer l'existence d'un demi-espace affine fermé qui contient C mais pas a.

Travaux dirigés 5 – Décomposition QR

Soit $\mathcal{T} \subset GL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$, fermé dans $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'application $g \mapsto g^{-1}$ de $GL(n, \mathbb{R})$ dans lui-même est continue.
3. Montrer que $O(n)$ est compact.

4. Montrer que l'application

$$\left\{\begin{array}{ccc} O(n)\times\mathcal{T} & \longrightarrow & GL(n,\mathbb{R}) \\ (k,t) & \longmapsto & kt \end{array}\right.$$

est un homéomorphisme, *i.e.* bijective continue de réciproque continue. (Pour la surjectivité, utiliser l'orthonormalisée de la base des colonnes de g ; pour la continuité de la réciproque, on pourra utiliser la caractérisation séquentielle et la compacité de $O(n)$.)

Travaux dirigés 6 – Le théorème de Weierstrass trigonométrique

On se propose de démontrer le théorème de Weierstrass trigonométrique. Soit donc $f\in\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $\varepsilon>0$. Soit $u_n(t)=c_n(1+\cos t)^n$ où c_n est choisi de sorte que $\displaystyle\int_0^\pi u_n(t)dt=1$.

On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est un élément de $\mathrm{Vect}(e^{ipt})_{p\in\mathbb{Z}}$.

1. Montrer que g est un polynôme trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{K}$ si et seulement si g s'écrit $t\mapsto a_0+\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\cos(kt)+\sum_{k=1}^n b_k\sin(kt)$ avec $n\in\mathbb{N}$ et les $a_k,b_k\in\mathbb{K}$.
2. Déterminer un équivalent de c_n puis la limite de $c_n\displaystyle\int_\eta^\pi(1+\cos t)^n$ où $\eta\in]0,\pi[$.
3. Soit $f_n(x)=\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x-t)u_n(t)dt$. Montrer que f est un polynôme trigonométrique à valeurs dans $\mathbb{K}$.
4. En utilisant l'uniforme continuité de f, montrer que (f_n) converge uniformément vers f.
5. Une application : le théorème d'approximation de Weierstrass.
   (a) Justifier qu'il suffit de démontrer le théorème pour h continue sur $[-\pi,\pi]$ et telle que $h(-\pi)=h(\pi)$.
   (b) En utilisant qu'un polynôme trigonométrique est développable en série entière, conclure.

♡ **Travaux dirigés 7** – Polynômes orthogonaux

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et pour tout entier naturel n, E_n désigne le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue strictement positive.

Partie 1 – Polynômes orthogonaux

1. Montrer que l'application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$(P,Q)\mapsto\langle P|Q\rangle=\int_a^b P(t)Q(t)w(t)dt$$

est un produit scalaire sur E.

On appelle *système orthogonal* pour $\langle|\rangle$ toute famille de polynôme $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\deg P_k=k$ et $\langle P_k|P_l\rangle=0$ si $k\neq l$.

2. Montrer qu'il existe un système orthogonal dans E.
3. Montrer que si $(P_k)_{k\geqslant 0}$ et $(Q_k)_{k\geqslant 0}$ sont deux systèmes orthogonaux de E, alors il existe une suite de réels $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $P_k=\lambda_k Q_k$ pour tout entier k. En déduire l'existence et l'unicité d'un système orthogonal unitaire (*i.e.* dont tous les polynômes sont de coefficient dominant 1).

Partie 2 – Étude des zéros

Soit désormais $(P_n)_{n\geqslant 0}$ un système orthogonal et k un entier naturel.

4. Justifier l'existence de deux entiers naturels p,q, de deux suites finies $(r_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(s_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ de réels de $]a,b[$, de deux suites finies $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et $(\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ d'entiers naturels >0 avec α_i impair et β_j pair, et de $Q\in E$ sans racine dans $]a,b[$ tels que

$$P_k=(X-r_1)^{\alpha_1}\cdots(X-r_p)^{\alpha_p}(X-s_1)^{\beta_1}\cdots(X-s_q)^{\beta_q}Q.$$

5. Montrer que si $p<k$, alors $\langle P_k|(X-r_1)\cdots(X-r_p)\rangle=0$.
6. En déduire que toutes les racines complexes de P_k sont réelles, simples et dans l'intervalle $]a,b[$.

On désigne désormais par $r_{k,1}<r_{k,2}<\cdots<r_{k,k}$ les racines de P_k. On les appelle les *points de Gauss* du polynôme P_k.

7. Pourquoi cette suite ne dépend-elle que de w et pas du choix de la suite orthogonale ?

Partie 3 – Relation de récurrence

8. On rappelle que $(P_n)_n$ est un système orthogonal. Montrer qu'il existe trois réels $\alpha_n,\beta_n,\gamma_n$ tels que $XP_n=\alpha_nP_{n-1}+\beta_nP_n+\gamma_nP_{n+1}$. (Partir de XP_n.)
9. On suppose P_n unitaire pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer l'existence de deux suites réelles $(a_n)_{n\geqslant 2}$ et $(b_n)_{n\geqslant 2}$ telles que pour tout entier $n\geqslant 2$, $P_n=(a_n+X)P_{n-1}+b_nP_{n-2}$.

Partie 4 – Une formule d'intégration

On désigne par ϕ la forme linéaire sur E définie par $P \mapsto \phi(P) = \displaystyle\int_a^b P(t)w(t)dt$. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on désigne par ψ_r la forme linéaire $P \mapsto \psi_r(P) = P(r)$. On note ϕ_n la restriction de ϕ à E_{n-1}.

10. Soient $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ une famille de réels distincts deux à deux. Montrer que la famille $(\psi_{x_j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ est une base du dual de E_{n-1}. (Utiliser les polynômes de Lagrange.)
11. D'après la question précédente, il existe une famille $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ de réels tels que $\phi_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}$ dans E_{n-1}^*. Montrer que pour tout $P \in E_{2n-1}$, on a encore
$$\phi(P) = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \mu_j \psi_{r_{n,j}}(P).$$
(Utiliser une division euclidienne.)

Partie 5 – Expression avec des déterminants

Pour tout entier naturel k, on pose $c_k = \langle X^k | 1\rangle$. On considère aussi les déterminants :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n-1} & c_{2n} \end{vmatrix},$$

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-2} & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^{n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

où x est un nombre réel. Par convention, $\Delta_0 = c_0$ et $D_0(x) = 1$.

12. Soit A_n la matrice carrée à $n+1$ lignes dont le terme à la i^e ligne et la j^e colonne est $\langle X^{i-1} | X^{j-1}\rangle$. Montrer que A_n est inversible. En déduire $\Delta_n \neq 0$.
13. Montrer que $x \mapsto D_n(x)$ est une fonction polynomiale dont on précisera le degré. On notera D_n le polynôme associé.
14. Montrer que $\langle D_n | X^k\rangle = 0$ si $k < n$. En déduire que la famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système orthogonal.

Partie 6 – Les polynômes d'Hermite

On note $g(x) = e^{-x^2/2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

15. Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
16. Soit $\Phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie sur par $\Phi(P) = XP' - P''$. Montrer que Φ est symétrique pour ce produit scalaire.
17. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ et que l'endomorphisme induit Φ_n est diagonalisable.
18. Montrer l'existence d'un unique $H_n \in \mathbb{R}[X]$ de coefficient dominant 1 tel que $\Phi(H_n) = nH_n$. Le polynôme H_n est le n-ième polynôme de *Hermite*.
19. Calculer H_k pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.
20. Exprimer H_{n+2} en fonction des H_k précédent, déterminer la parité et une équation diférentielle linéaire vérifiée par H_n et exprimer H'_{n+1} en fonction de H_n.
21. Exprimer H_n en fonction de $g^{(n)}$.
22. Déterminer $\|H\|_n^2$ en fonction de H_{n-1} puis en fonction de n.

Indications

Exercice 3. Remarquer que si P est inversible, $(x, y) \mapsto \langle Px|Py\rangle$ est un produit scalaire. Ou considérer la trace.

Exercice 4. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 5.
1. Considérer l'hyperplan normal à $x - y$.
2. En posant $y = f(x)$, choisir une réflexion s telle que $\operatorname{codim} \operatorname{Ker}(s \circ f - \mathrm{Id}_E) < \operatorname{codim} \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$. Raisonner ensuite par récurrence.

Exercice 8.
1. On a
$$|a_1.f_1(x) + ... + a_n.f_n(x)| \leqslant \|a_1.f_1 + ... + a_n.f_n\|_\infty \leqslant C\|a_1.f_1 + ... + a_n.f_n\|_2.$$
On pose ensuite $a_i = f_i(x)$.
2. On intègre sur $[0, 1]$, ce qui borne $n = \dim E$.

Exercice 9.
1. C'est un espace affine.
2. Projeter orthogonalement.

Exercice 12. Pour $SO(n)$, utiliser la réduction.

Exercice 13. Utiliser la réduction.

Exercice 14. Commencer par $n = 2$ puis généraliser.

Solutions

Exercice 5. (TD 5 - q4) Soit (e_j) la base canonique de $\mathbb{R}^n$, c_j la j-ième colonne de g. Soit (u_j) l'orthonormalisée de (c_j) par le procédé de Schmidt. Par définition, pour chaque j, il existe des réels $a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{j,j}$ tels que $c_j = a_{1,j}u_1 + a_{2,j}u_2 + \cdots a_{j,j}u_j$. On définit $k \in \mathcal{L}(E)$ par $k(e_j) = u_j$. On a donc $k \in O(n)$ car envoie une base orthonormée sur une base orthonormée. En posant $t = k^{-1}g$, on a pour tout j que $t(e_j) = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots a_{j,j}e_j$. Donc $t \in \mathcal{T}$.