Suites

Exercice 1 * : [e est irrationnel]

On considère les suites $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n\,n!}$. Montrer que $((u_n)_n, (v_n)_n)_{n\geqslant 2}$ forme un couple de suites adjacentes et montrer que la limite est irrationnelle.

Exercice 2 * : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive telle que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on a $u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$.

1. Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u_{nk}}{nk} \leqslant \frac{u_n}{n}$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geqslant N$ implique $\frac{u_k}{k} \leqslant \frac{u_n}{n} + \varepsilon$.
3. Montrer que $(u_n/n)_n$ converge vers $\inf u_n/n$.

Exercice 3 – Règle de Cauchy : Soit u_n une suite strictement positive. Montrer que si $u_{n+1}/u_n \to l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, alors $\sqrt[n]{u_n}$ converge aussi vers l.

Exercice 4 * : Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Montrer qu'elle admet une sous-suite monotone. En déduire une nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 5 * :

1. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle telle que $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est un intervalle.
2. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue et $(u_n)_n$ la suite définie par récurrence par $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.
3. Donner un exemple de suite (u_n) dans $[a, b]$ non convergente telle que $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.

Exercice 6 * : Soit u une suite réelle bornée telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} \leqslant u_n + u_{n+2}$. Montrer que u est décroissante.

Exercice 7 * : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable.

Exercice 8 * : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est dérivable en dehors d'un ensemble dénombrable ou fini.

Exercice 9 * : En utilisant que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donner un exemple de suite réelle dont tout réel est valeur d'adhérence.

Exercice 10 * : Soit A une partie dense de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Montrer qu'il existe une unique prolongement continu $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f et que ce prolongement est k-lipschitzien.

Exercice 11 * : Étudier la convergence de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \sin(2u_n)$.

Exercice 12 * – Recherche d'équivalents :

1. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n + \ln x_n = n$. Déterminer un développement asymptotique à 4 termes de (x_n).
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n \ln x_n = n$. Déterminer un équivalent puis un développement asymptotique à 2 termes de (x_n).
3. Justifier l'existence d'un unique $x = x(t) \geqslant 0$ tel que $xe^x = t$ pour tout $t > 0$. Donner un développement asymptotique à quatre termes en $+\infty$ de x.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $t_n \in]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan t_n = t_n$. Donner un développement asymptotique de t_n à quatre termes. (Indication : on pourra exprimer $\arctan 1/t$ en fonction de $\arctan t$.)
5. Donner un développement asymptotique de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.
6. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $x_n^n + x_n = 1$. Montrer que la suite (x_n) est monotone et convergente. Soit l sa limite. Donner un équivalent de $x_n - l$.
7. Soit $n \geqslant 2$ et β_n l'unique racine dans $[0, 1]$ du polynôme $X^n - nX + 1$. Donner un équivalent de la suite (β_n). Quel est le terme suivant dans le développement asymptotique ?

Travaux dirigés 1 – Équivalent d'une suite récurrente autonome ♡

1. Soit I un segment ou $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans I. Soit x_0 un point fixe de f. On considère la suite définie par récurrence par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n.
   (a) On suppose que $|f'(x_0)| < 1$. Montrer qu'il existe $h > 0$ tel que pour tout $u_0 \in I \cap [x_0 - h, x_0 + h]$, la suite (u_n) converge vers x_0. *(On dit que la suite est attractive au voisinage de x_0.)* Que se passe-t-il si $f'(x_0) = 0$?
   (b) On suppose que $|f'(x_0)| > 1$. Montrer que la suite (u_n) converge vers x_0 si et seulement si elle est stationnaire et stationne à x_0. *(On dit que la suite est répulsive au voisinage de x_0.)*

2. Soit f une fonction réelle continue définie sur un intervalle I de la forme $[0, b[$ où $b > 0$. On suppose qu'au voisinage de 0,

$$f(x) = x - ax^\beta + o(x^\beta)$$

avec $a > 0$ et $\beta > 1$. Soit (u_n) la suite définie par récurrence par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Montrer qu'il existe un réel $h > 0$ tel que $f(]0, h[) \subset]0, h[$ et pour tout $x \in]0, h[$, on a $f(x) < x$. En déduire que pour $u_0 \in]0, h[$, la suite (u_n) est bien définie. On suppose désormais $u_0 \in]0, h[$.

   (b) Déterminer le signe, la monotonie et la convergence de (u_n).

   (c) Déterminer $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_{n+1}^\gamma - u_n^\gamma$ converge vers $l \in \mathbb{R}^*$. En déduire un équivalent de u_n.

   (d) Application : pour les fonctions suivantes, donner un intervalle $J =]0, h[\subset \mathbb{R}^+$ tel que pour $u_0 \in J$, $u_n > 0$ et $\lim u_n = 0$, puis un équivalent de la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (faire un dessin lisible) :

$$f_1(x) = xe^{-x} \qquad f_2(x) = \sin x.$$

Fonctions dérivables

Exercice 13 – Quizz : Ici, f est à valeurs réelles.

1. Soit $a < x_0 < b$ trois réels et f une fonction dérivable sur $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.
   (a) On suppose que la limite $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ existe. La fonction f est-elle dérivable en x_0 ?
   (b) On suppose f dérivable en x_0. A-t-on convergence de f' vers $f'(x_0)$ en x_0 ?
2. On suppose f dérivable sur un voisinage de a telle que $f'(a) \neq 0$. La fonction f est-elle monotone sur un voisinage de a ? Et si f est de classe $\mathcal{C}^1$?
3. Existe-t-il une fonction dérivable en 0 définie sur $\mathbb{R}$ et continue seulement en 0 ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner un exemple de fonction admettant un DL à l'ordre n en 0 mais qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
5. Donner un exemple de fonction admettant un DL à tout ordre en 0 mais qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et bornée telle que f' converge en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$.
7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que f converge en $+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$?

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et α un réel strictement positif. On suppose que f est majorée et que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f''(t) \geqslant \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe et décroissante.
2. Montrer que f admet une limite finie l en $+\infty$ et que $l = 0$. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)
3. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$ et que cette limite est nulle.
4. Montrer que la fonction $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est croissante et en déduire le signe de $\alpha f + f'$.
5. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leqslant f(0)e^{-\alpha t}$. (On considérera $t \mapsto f(t)e^{\alpha t}$.)

Exercice 15 * : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable avec $f(0) = 0$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 16 ** : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable avec $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}$.

Exercice 17 * – le théorème de Darboux : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. En considérant $E = \{(x, y) \in I^2 | x < y\}$ et $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$, montrer que $f'(I)$ est un intervalle. (C'est le théorème de Darboux.)
2. Montrer que si f' prend des valeurs positives et négatives, elle s'annule. En déduire le théorème de Darboux.

Exercice 18 * : Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : [0, 1] \to [0, 1]$ telles que $f \circ f = f$. (Indication : caractériser l'ensemble des points fixes de f.)

Exercice 19 * – Inégalité d'Young : Soient a un réel strictement positif et f une fonction strictement croissante et continue sur $[0, a]$ telle que $f(0) = 0$. On appelle g la réciproque de f.

1. On suppose f dérivable. Montrer la formule

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = xf(x). \tag{1}$$

2. En interprétant graphiquement les deux intégrales précédentes, démontrer l'égalité (1) sans l'hypothèse de dérivabilité.
3. Soient u et v vérifiant $0 \leqslant u \leqslant a$ et $0 \leqslant v \leqslant f(a)$. Vérifier que
$$uv \leqslant \int_0^u f(t)\mathrm{d}t + \int_0^v g(t)\mathrm{d}t$$
4. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $uv \leqslant \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$.

Exercice 20 * : Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$. Montrer que $\ln f$ est convexe si et seulement si f^α est convexe pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 21 * : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f^2 + (1 + f')^2 \leqslant 1$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 22 – Inégalité de Kolmogorov :

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $M_0 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f|$ et $M_2 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f''|$ existent. Montrer qu'alors $M_1 = \sup\limits_{\mathbb{R}} |f'|$ existe et que $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$. (Considérer $f(x+h)$ et $f(x-h)$.)
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées. Montrer que $f^{(k)}$ est bornée si $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Exercice 23 ** – Le théorème de Glaeser : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose dans cette question que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$. Soit $\alpha > 0$ et $M(\alpha) = \sup\limits_{t \in [-2\alpha, 2\alpha]} |f''(t)|$. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, on a
$$f'^2(x) \leqslant 2f(x)M(\alpha).$$
(On considérera le polynôme $P(h) = M(\alpha)\dfrac{h^2}{2} + hf'(x) + f(x)$.)
3. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{f}$ soit de classe $\mathcal{C}^1$. (Théorème de Glaeser (1963).)

Exercice 24 *–précision d'une approximation par une somme de Riemann :

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Déterminer α tel que
$$\int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Déterminer α et β tels que
$$\int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
3. En déduire un développement asymptotique à trois termes de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2}$.

Travaux dirigés 2 – L'algorithme de Newton-Raphson

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ non affine. On suppose que $f(a) < 0$, que $f(b) > 0$ et que f' est strictement positive. On considère la fonction $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par
$$\phi(t) = t - \frac{f(t)}{f'(t)}.$$
L'objet est ici de donner une méthode pour calculer avec une grande précision une valeur approchée d'un zéro de f.

1. (a) Justifier l'existence de $M = \sup\limits_{[a,b]} |f''|$ et de $m = \inf\limits_{[a,b]} |f'|$. Montrer que M et m sont strictement positifs.
   (b) Soit $x_0 \in [a,b]$. Déterminer l'intersection de la tangente à la courbe représentative de f en x_0 et l'axe Ox.
   (c) Montrer que f admet un unique zéro r.
2. Écrire un programme **approximation(f, epsilon, a, b)** en Python d'arguments une fonction f comme ci-dessus et un réel *epsilon* > 0 qui renvoie une liste $[u,v]$ où $u, v \in [a,b]$, $v - u \leqslant$ *epsilon* et $r \in [u,v]$.
3. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, il existe un $c \in [a,b]$ compris entre x et r tel que
$$\phi(x) - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x)}(x-r)^2.$$
4. Soit $h = \min(|r-a|, |r-b|, m/M)$. Montrer que pour tout $x_0 \in [r-h, r+h]$, la suite définie par récurrence par son premier terme x_0 et $x_{n+1} = \phi(x_n)$ est bien définie et que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$
$$|x_n - r| \leqslant \frac{2m}{M}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

En déduire la convergence de (x_n) vers r. Si on fait les calculs en base 2, combien de chiffres binaires gagne-t-on en précision quand on passe de x_n à x_{n+1} ? (On ne détaillera pas le fait que la grandeur de $\dfrac{M}{2m}$ ne joue asymptotiquement aucun rôle.)

5. On suppose f convexe et que $f''(r) \neq 0$. Montrer que pour tout $x_0 \in [r, b]$, la suite définie par récurrence par son premier terme x_0 et $x_{n+1} = \phi(x_n)$ est bien définie et converge vers r. Donner un équivalent de
$$\frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)^2}.$$
6. *Un exemple.* Déterminer une valeur approchée rationnelle de $\sqrt{1789}$ à 10^{-11} près avec la méthode de Newton en partant d'un x_0 entier. On donnera les résultats intermédiaires.
7. À quelle suite récurrente conduit la méthode de Newton lorsqu'on veut une valeur approchées de $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$?

Séries numériques

Exercice 25 : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. $n^{1/n} - 1$;
2. $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$;
3. $n^{-1-1/n}$;
4. $\ln\left(\dfrac{n+1/2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$;
5. $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;
6. $\dfrac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^\alpha}$;
7. $\left(1 - \dfrac{1}{\ln n}\right)^{n^\alpha}$;
8. $(n+1)^{1/n} - n^{1/(n+1)}$;
9. $1 - \tanh \sqrt{\ln n}$;
10. $n^{\cos(1/n) - 2}$;
11. $e^{-(\ln n)^\alpha}$;
12. a^{H_n} $(a > 0)$;
13. $H_n / \ln n!$;
14. $e^{\arctan \frac{n-1}{n+1}} - e^{\frac{\pi}{4}}$;
15. $\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$;
16. $1 - \tanh \sqrt{\ln n}$;
17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^\alpha}$;
18. $\left(\dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^\alpha$.

Exercice 26 : Déterminer la nature des séries de terme général $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$:

1. $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$;
2. $\cos(\pi n^2 \ln(1 + 1/n))$
3. $\left(1 - \dfrac{1-i}{n}\right)^{n^2}$;
4. $(-1)^n \left(e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$;
5. $\dfrac{1}{\ln n + (-1)^n n^\alpha}$;
6. $\left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} - l$ où $l = \lim \left(n \sin \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$;
7. $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p}$;
8. $\ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}\right)$;
9. $\dfrac{(-1)^n n^{-\alpha}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$;
10. $\sin(\pi \sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta})$;
11. $\sin\left(\pi \sqrt{n^2 + \dfrac{n^\alpha}{\ln n}}\right)$ avec $\alpha \leqslant 1$;
12. $\ln \tan \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. (On commencera par traiter l'exercice 33.)

Exercice 27 : Existence et calcul de

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(4n^2-1)}$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sum_{p=1}^{k}p^2}$.

Exercice 28 ** : Soit a_n le terme général d'une série positive convergente. A-t-on nécessairement $a_n=o(1/n)$? Et si (a_n) décroit ?

Exercice 29 * : On pose $u_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(2-\sqrt[k]{3})$ pour $n\geqslant 2$.

1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Quelle est la nature de la série de terme général (u_n) ?
3. Quelle est la nature de la série de terme général $((-1)^n u_n)$?

Exercice 30 * : Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $p(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture de n en base 10. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{(p(n))^{p(n)}}$.

Exercice 31 * : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on se donne $a_n\geqslant 0$. Pour $u_0\in\mathbb{R}_+^*$, on définit une suite u par la relation $u_{n+1}=u_n+\dfrac{a_n}{u_n}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 32 * : Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_n\sin(\pi e n!)$.

Exercice 33 :

1. En considérant la somme géométrique $1-t^2+t^4+\cdots+(-1)^n t^{2n}$, montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$.
2. Déterminer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 34 – Mines 2010 : Soit $\alpha>0$ et $u_n=\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-\lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}$ pour $n\geqslant 1$. Discuter suivant α la nature de la série de terme général u_n et calculer sa somme lorsque $\alpha=1$.

Exercice 35 ** : Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

Exercice 36 – Mines 2010 : Nature de la série de terme général $\displaystyle\left(\prod_{k=2}^{n}k^k\right)^{-4/n^2}$?

Exercice 37 – Mines 2010 : Nature de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\cos x)^{n^2\ln n}\mathrm{d}x$?

Exercice 38 * : Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On souhaite montrer que $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{p}$ diverge.

1. Pour $N\in\mathbb{N}^*$, on note $P_N=\displaystyle\prod_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant N}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, $P_N\geqslant\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$.
2. Montrer que $\ln P_N\sim\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P},\ p\leqslant N}\frac{1}{p}$ et conclure.

Exercice 39 : En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent en 1^- de $f:t\mapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^n}$.

Exercice 40 : Montrer la sommabilité et caluler la somme de la série double de terme général $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$.

Exercice 41 : Soit $(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$. Étudier la sommabilité de la famille $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 42 * : Montrer pour tout réel x tel que $|x|<1$ les égalités

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{1-x^{2n}};\qquad\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}=\frac{x}{1-x}.$$

Exercice 43 * – Analyticité de la fonction ζ :

1. Étudier la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^z}$ où $z\in\mathbb{C}$. On notera $\zeta(z)$ sa somme.

2. Soit $h \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$. Étudier la sommabilité et déterminer la somme de la série double $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ où

$$u_{p,q} = \frac{(-1)^p h^p \ln^p q}{p! q^z}.$$

3. Pour $\mathrm{Re}(z) > 1$, montrer qu'il existe $\eta > 0$ et une suite complexe (a_p) tels que

$$\forall h \in \mathbb{C},\ |h| < \eta \Longrightarrow \zeta(z+h) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p h^p.$$

Indications

Exercice 1. Supposer par l'absurde que $e = p/q$ et "zoomer" avec le bon rapport.

Exercice 3. Passer au logarithme et penser à Cesàro.

Exercice 4. Se ramener au cas borné.

Exercice 6. Quel est l'analogue continu ?

Exercice 9. Considérer $n \mapsto u_n$.

Exercice 10. Utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 12.

1. Mettre en facteur le coefficient dominant.
2. La forme $u_n + \ln u_n$ de l'exo précédent est plus agréable que ce produit. À bon entendeur...
3. Idem précédent.
4. Déterminer la limite puis un équivalent, puis appliquer le "bootstrapping".
5. Bootstraping.
6. Idem

Exercice 15. Utiliser la définition de la décidabilité avec un DL et se placer à n assez grand.

Exercice 16. Faire un dessin et bien comprendre ce que signifie l'existence du point c. On pourra distinguer selon que $f'(a) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ou non.

Exercice 17.

1. Remarquer que $\varphi(E)$ est un intervalle, et presque égal à $f'(I)$.
2. Si $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, regarder les extremums de f sur $[a, b]$.

Exercice 20. Faire un DL lorsque α tend vers 0.

Exercice 24.

1. Utiliser la formule de Taylor-Lagrange sur $[n, n + 1]$, puis reconnaître une somme de Riemann.
2. Comme précédemment, avec un petit piège.

Exercice 31. La suite (u_n) est de même nature que $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Exercice 32. Partir de $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ et en déduire une approximation de e qui donne une information pertinente sur $n!e$.

Exercice 33. On intègre entre 0 et 1 $t \mapsto \dfrac{1 - (-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1 + t^2}$.

Exercice 34. Le terme $E(\sqrt{n + 1}) - E(\sqrt{n})$ est presque toujours nul.

Exercice 37. Sans le terme $\ln n$, c'est une suite connue.

Exercice 39. Poser $\varphi(x) = \dfrac{t^x}{1 + t^x}$ et considérer $\displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(x)dx - \varphi(n)$.

Exercice 42. Faire fi de la convergence dans un premier temps, puis utiliser une série géométrique.

Solutions

Exercice 9. Soit $n \mapsto u_n$ une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On construit par récurrence une sous-suite de (u_n) qui converge vers x en remarquant que $\{n \in \mathbb{N} \mid |u_n - x| \leqslant \varepsilon\}$ est infini.

Exercice 16. Quitte à soustraire une fonction affine et changer de signe, on peut supposer que $f(a) = f(b) = 0$ et que $f'(a) = f'(b) \geqslant 0$.

Si $f'(a) > 0$: on pose $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Puisque $f'(a) > 0$, g prend des valeurs > 0. Puisque $f'(b) > 0$, g prend des valeurs strictement négatives au voisinage de b^-. Donc g admet un minimum < 0 atteint en $c \in]a, b[$. Donc $g'(c) = 0$. Mais alors, en dérivant $f(x) - f(a) = g(x)(x - a)$ et en évaluant en c, on trouve $f'(c) = g(c)$.

Si $f'(a) = 0$: on peut supposer f non constante. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que f admet un maximum atteint en $d \in]a, b[$. Sur $[a, d]$, on est ramené au cas précédent.

Exercice 17.

1. E est convexe comme intersection de convexes et φ est continue. Donc $J = \varphi(E)$ est un intervalle comme image d'un connexe par arcs par une application continue. On a que $J \subset f'(I)$ car $\varphi(x, y) = f'(c)$ par l'égalité des accroissements finis. Réciproquement, $f'(x) = \lim_{y \to x} \varphi(x, y)$, donc $f'(I) \subset \overline{J}$. Mais tout ensemble inclus entre J et $\overline{J}$ est un intervalle.
2. À symétrie près, on a $a < b$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$. Le maximum sur $[a, b]$ est donc atteint en $c \in]a, b[$, et donc $f'(c) = 0$. Si maintenant $\alpha \in]f'(a), f'(b)[$, on considère $t \mapsto f(t) - \alpha t$.

Exercice 2.

1. (a) Les fonctions $|f''|$ et $|f'|$ sont continues car f est de classe $\mathcal{C}^2$. Elles sont donc bornées sur le segment $[a, b]$ et atteignent leurs bornes. Si $M = 0$, alors f'' est identiquement nulle et f est alors affine, contradiction. Soit $x_0 \in [a, b]$ tel que $|f'(x_0)| = m$. Comme f' est strictement positive sur $[a, b]$, m est bien strictement positif.

   (b) La tangente en x_0 à la coube représentative de f a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. On résout $0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et on trouve que $x = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

   (c) Puisque f change de signe sur $[a, b]$, f s'annule d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ce zéro est unique car f' est strictement positif et donc f est strictement monotone.
2. L'idée est de regarder l'image du milieu de $[a, b]$. Si elle est strictement positive, l'unique zéro de f se trouve à gauche du milieu. Sinon, il est à droite. On recommence et à chaque étape on a un segment de longueur deux fois plus petite. On s'arrête quand on a atteint la précision voulue.
3. On applique la formule de Taylor-Lagrange entre x et r. Il existe donc un c compris entre x et r tel que
$$0 = f(r) = f(x) + (r - x)f'(x) + \frac{(r - x)^2}{2} f''(c).$$
Par définition de ϕ on a $f(x) = xf'(x) - f'(x)\phi(x)$. En remplaçant dans l'équation précédente, on trouve
$$0 = -f'(x)\phi(x) + rf'(x) + \frac{(r - x)^2}{2} f''(c).$$
D'où
$$\phi(x) - r = \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(x)} (x - r)^2.$$
4. Puisque $h \leqslant \min(|r - a|, |r - b|)$, on a $[r - h, r + h] \subset [a, b]$. D'après la question précédente,
$$|\phi(x) - r| \leqslant \frac{M}{2m} (x - r)^2.$$
Comme $|x - r| \leqslant h \leqslant m/M$, on a de plus $\dfrac{M}{m} |x - r|^2 \leqslant |x - r|$. D'où
$$|\phi(x) - r| \leqslant \frac{1}{2} |x - r|.$$
En particulier, $\phi(x)$ appartient à $[r - h, r + h]$ et donc la suite (x_n) est bien définie.
Montrons par récurrence sur n que
$$|x_n - r| \leqslant \frac{2m}{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$
C'est vrai si $n = 0$ car
$$|x_0 - r| \leqslant h \leqslant \frac{m}{M} = \frac{2m}{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}.$$
Supposons la formule vraie au rang $n - 1$ ($n \geqslant 1$). Alors d'après ci-dessus,
$$|x_n - r| = |\phi(x_{n-1}) - r| \leqslant \frac{M}{2m} (x_{n-1} - r)^2 \leqslant \frac{M}{2m} \left(\frac{2m}{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}} \right)^2 = \frac{2m}{M} \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}.$$

La suite $1/2^{2^n}$, sous-suite d'une suite géométrique de raison $1/2$, converge vers 0, donc (x_n) converge vers r.

La convergence est extrêmement rapide : le nombre de chiffres binaires (=bit) double à chaque itération (si l'on néglige le terme constant $M/2m$).

5. Pour prouver que (x_n) est bien définie, il suffit de voir que l'intervalle $[r, b]$ est stable par ϕ. Or si $x \in [r, b]$, alors $\phi(x) - x = -\dfrac{f(x)}{f'(x)} \leqslant 0$ car $f' > 0$ et f est positive sur $[r, b]$ par monotonie. Donc $\phi(x) \leqslant x \leqslant b$. On a donc mieux : (x_n) sera décroissante. D'autre part, d'après la question 3, il existe c compris entre r et x tel que
$$\phi(x) - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x)}(x-r)^2.$$
Le second membre étant positif, on a $\phi(x) \geqslant r$.
Comme (x_n) est décroissante minorée par r, elle converge vers une limite l. Comme (x_{n+1}) est une suite extraite de (x_n), elle converge vers la même limite. Par continuité de ϕ, $l = \lim x_{n+1} = \lim \phi(x_n) = \phi(l)$. Or $l = \phi(l)$ équivaut à $-f(l)/f'(l) = 0$, *i.e.* $l = r$. Donc (x_n) converge vers r.
Enfin d'après la question 3, $\dfrac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{f''(c_n)}{f'(x_n)}$ où c_n est compris entre x_n et x_{n+1}. Donc $\lim c_n = r$ par le théorème d'encadrement. Par continuité de f' et f'', $\lim \dfrac{f''(c_n)}{f'(x_n)} = \dfrac{f''(r)}{f'(r)} \neq 0$. D'où
$$\frac{x_{n+1} - r}{(x_n - r)^2} \sim \frac{f''(r)}{2f'(r)}.$$

6. *Un exemple.* On trouve rapidement la partie entière supérieure de $\sqrt{1789}$, à savoir 43. On implémente l'algorithme de Newton avec la fonction $f(t) = t^2 - 1789$. Elle vérifie bien les hypothèses voulue sur $[42, 43]$. La fonction ϕ est donc $\phi(x) = x - \dfrac{x^2 - 1789}{2x} = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1789}{x}\right)$. La calculatrice donne les valeurs successives : $x_0 = \mathbf{43}$, $x_1 = \mathbf{42}.302325581396$, $x_2 = \mathbf{42.29657}2356393$, $x_3 = \mathbf{42.296571965116}$ et stationne ensuite à cette valeur. On a représenté en gras les chiffres exacts. D'où $\sqrt{1789} \approx 42,396571965116$.

Exercice 29. 1. De $2 - \sqrt[k]{3} = 1 - \dfrac{\ln 3}{k} + O(1/k^2)$, on tire que $\ln u_n = \ln 3\ H_n +$ terme convergent. Donc $\ln u_n$ tend vers $-\infty$ et u_n tend vers 0.

2. Vu que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, on a $\ln u_n = C - \ln 3\ \ln n + o(1)$ où C est une constante réelle. Donc $u_n \simeq \dfrac{e^{C+o(1)}}{n^{\ln 3}}$, d'où la convergence absolue par la règle de Riemann.

3. Vu.

Exercice 35. Soit $a_k = \dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$. On remarque que les termes d'indice $k \in [\![p^2, (p+1)^2 - 1]\!]$ ont tous le même signe $(-1)^p$ car $p^2 \leqslant k < (p+1)^2$ implique $E(\sqrt{k}) = p$. L'idée est de sommer sur des "tranches" $k \in [\![p^2, (p+1)^2 - 1]\!]$.

On note $\sigma_p = \displaystyle\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{k}$, de sorte que $\displaystyle\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} a_k = (-1)^p \sigma_p$. Soit aussi $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ les sommes partielles de a_k.

1. La suite S_{n^2-1} converge : en effet, $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \sigma_p$ est une série alternée avec $0 \leqslant \sigma_p = \displaystyle\sum_{k=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{k} \leqslant (2p+1)\frac{1}{p^2} \to 0$. (On a majoré chacun des $2p+1$ termes de la somme par le plus grand d'entre eux, à savoir $1/p^2$.) D'après le théorème des séries alternées, il suffit de prouver que la suite $(\sigma_p)_p$ décroît.

Commençons par donner un argument heuristique pour cette décroissance, qui nous donnera une idée de la précision dont on aura besoin dans les calculs. On a $\sigma_p = H_{(p+1)^2-1} - H_{p^2-1}$ et donc $\sigma_{p+1} - \sigma_p = H_{(p+2)^2-1} - H_{(p+1)^2-1} - H_{(p+1)^2-1} + H_{p^2-1} = H_{(p+2)^2-1} + H_{p^2-1} - 2H_{(p+1)^2-1}$. On sait que $H_n \simeq \ln n + \gamma$. Pour simplifier, on remplace les $p^2 - 1$ par p^2 (l'écart entre $\ln(p^2 - 1)$ et $\ln p^2$ est de l'ordre de $1/p^2$) et on note $n = p + 1$. En substituant :
$$\begin{aligned}\sigma_{p+1} - \sigma_p &\simeq \ln((n+1)^2) + \ln((n-1)^2) - 2\ln n^2 \\ &= 2\ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right) = 2\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{2}{n^2}\end{aligned}$$
qui est bien négatif à partir d'un certain rang.

Pour transformer cette approximation en preuve rigoureuse, il est raisonnable, vu ce qui précède, de prendre une approximation à $1/n^2$ près de H_n. Or on a
$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{n} - \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
pour un $a \in \mathbb{R}$. (Soit par la formule d'Euler-MacLaurin, soit par sommation des relations de comparaison comme dans le cours.)

On veut un équivalent de $H_{(p+2)^2-1} + H_{p^2-1} - 2H_{(p+1)^2-1} = \Delta^2(\alpha_p)$ où $\alpha_p = H_{p^2-1}$. Pour simplifier les calculs, on pose
$$u_p = \ln(p^2 - 1); \qquad v_p = \frac{1}{p^2 - 1}, \qquad w_p = -\frac{a}{(p^2-1)^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

de sorte que $H_{p^2-1} = u_p + v_p + w_p$. On a immédiatement

$$w_{p+1} - w_p = \frac{a}{((p+1)^2-1)^2} - \frac{a}{(p^2-1)^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

qui est un $o(1/p^2)$ car tous les termes le sont. Par différence, $\Delta^2 w^p$ est un $o(1/p^2)$.

On a de même $\Delta v_p = \frac{1}{(p+1)^2-1} - \frac{1}{p^2-1} = o\left(\frac{1}{p^2}\right)$ en réduisant au même dénominateur.

Enfin, en posant $q = p+1$,

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_p &= \ln\left(\frac{((p+2)^2-1)(p^2-1)}{(p+1)^2-1}\right) = \ln\left(\frac{((q+1)^2-1)((q-1)^2-1)}{q^2-1}\right)\\
&= \ln\left(\frac{q^4-4q^2}{q^4-2q^2+1}\right) = \ln\left(\frac{q^4-2q^2+1-(2q^2+1)}{q^4-2q^2+1}\right)\\
&= \ln\left(1-\frac{2q^2+1}{q^4-2q^2+1}\right) = \ln\left(1-\frac{2}{q^2}\frac{1+1/2q^2}{1-2/q^2+1/q^4}\right)\\
&= \ln\left(1-\frac{2}{q^2}+O\left(\frac{1}{q^3}\right)\right) = -\frac{2}{q^2}+O\left(\frac{1}{q^3}\right).
\end{aligned}$$

On a donc, à partir d'un certain rang, que $\sigma_{p+1} - \sigma_p$ est négatif. Ceci garantit la convergence de la série $\sum_p (-1)^p \sigma_p$.

2. Passons à la convergence de S_n. Soit $\varepsilon > 0$. On note l la limite de la suite $(\sum_p (-1)^p \sigma_p)$, *i.e.* de (S_{n^2-1}). Par définition de la limite, il existe un rang N tel que $n \geqslant N$ implique $\left|\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \sigma_p - l\right| \leqslant \varepsilon$. Quitte éventuellement à prendre N encore plus grand, on peut supposer $\sigma_p \leqslant \varepsilon$ pour tout $p \geqslant N$.

On peut maintenant conclure. Soit $N_1 = N^2$. Pour tout $n \geqslant N_1$, il existe un unique $p \geqslant N$ tel que $p^2 \leqslant n \leqslant (p+1)^2 - 1$. On a alors

$$\begin{aligned}
|S_n - l| &= |S_{p^2-1} + \sum_{k=p^2}^{n} \frac{(-1)^{E(\sqrt{k})}}{k} - l| \leqslant |S_{p^2-1} - l| + |\sum_{k=p^2}^{n} \frac{1}{k}|\\
&\leqslant |S_{p^2-1} - l| + |\sum_{k=p^2}^{n} \frac{1}{k}| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$