1. Expression et majoration des coefficients

1) Montrons qu'il y a égalité si tous les z_k non nuls ont même argument θ *modulo* 2π. On peut donc écrire $z_k = \rho_k e^{i\theta}$ où $\rho_k \geqslant 0$. On a donc

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^n \rho_k e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta}\sum_{k=1}^n \rho_k\right| = \sum_{k=1}^n \rho_k = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Réciproquement, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$, alors les z_k ont nuls ont tous même argument. C'est évident si $n = 1$.

Si $n = 2$, on a $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ d'après le cours. Montrons le cas d'égalité. Supposons $|z_|+|z_2| = |z_1+z_2|$. On peut supposer $z_1, z_2 \neq 0$, sinon c'est fini. En élevant au carré des deux cotés, on obtient $|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2| = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$, *i.e.* $2|z_1 z_2| = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\overline{\overline{z_2}}$. En posant $z = z_1\overline{z_2}$ et puisque $|z_1 z_2| = |z|$, on a $|z| = \operatorname{Re}(z)$, et donc $z = |z| \in \mathbb{R}^*$. Donc z_1 et z_2 ont le même argument.

Supposons la propriété vraie pour $n-1$ avec $n \geqslant 3$. Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$. On peut supposer que tous les z_k sont non nuls, sinon on peut tout de suite appliquer l'hypothèse de récurrence. On a d'après l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| + |z_n| \leqslant \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Les deux inégalités sont donc des égalités et on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n-1} |z_k|.$$

D'après l'hypothèse de récurrence et le cas $n = 2$ appliqué à $z_1 + \cdots + z_{n-1}$ et z_n, on a que $z_1, \dots, z_{n-1}$ ont même argument et $z_1 + \cdots z_{n-1}$ et z_n ont même argument. CQFD

2) Rappelons que $\mathbb{U}_n = \{z^k / 0 \leqslant k \leqslant n-1\}$ où $z = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. En notant $S(q)$ la somme à calculer, $nS(q) = \sum_{k=0}^{n-1} (z^k)^q = \sum_{k=0}^{n-1} (z^q)^k$ est une somme géométrique de raison z^q. Donc

$$nS(q) = \begin{cases} \dfrac{1-(z^q)^n}{1-z^q} = 0 & \text{si } z^q \neq 1, \\ n & \text{si } z^q = 1. \end{cases}$$

De plus, $z^q = e^{\frac{2iq\pi}{n}} = 1$ si et seulement si $\dfrac{2\pi q}{n} \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $\dfrac{q}{n} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que $n \mid q$. En divisant par n, $S(q) = \dfrac{1}{n}\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^q = \begin{cases} 1 & \text{si } n \mid q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

3) Fixons $k \in [\![0, d]\!]$:

$$\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} P(\omega)\omega^{-k} = \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\left(\sum_{j=0}^d a_j\omega^j\right)\omega^{-k} = \sum_{j=0}^d\left[a_j\left(\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^{j-k}\right)\right].$$

Or

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}\omega^{j-k}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \mid (j-k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \mod n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où le résultat.

4) (a) Si on suppose $n > d$, pour j, k dans $[\![0, d]\!]$, la condition $j = k \mod n$ n'est vérifiée que pour $j = k$. D'où le résultat.

(b) Déjà l'ensemble $\{|P(\omega)| \,/\, \omega \in \mathbb{U}_n\}$ est une partie finie de $\mathbb{R}$ qui admet un maximum noté K dans la suite.
On applique l'inégalité triangulaire dans la relation (1). On obtient

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|P(\omega)\omega^{-k}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|P(\omega)| \leqslant \frac{1}{n}(nK) = K.$$

Si de plus $P = a_k X^k$ avec$a_k \neq 0$, alors pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a $|P(\omega)| = |a_k|$ et donc $|a_k| = K$.

(c) Il suffit de montrer que si $K = |a_k|$, alors $P = a_k X^k$. On applique l'inégalité triangulaire dans la relation (1). On obtient

$$|a_k| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|P(\omega)\omega^{-k}| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n}|P(\omega)| \leqslant \frac{1}{n}(nK) = K.$$

Puisque $|a_k| = K$, on peut substituer chaque symbole " $\leqslant$ " par " = ". La première substitution est possible s'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire généralisée, c'est-à-dire si tous les $P(\omega)\omega^{-k}$ non nuls ont le même argument. La seconde substitution est possible si et seulement si chaque terme $|P(\omega)| = |P(\omega)\omega^{-k}|$ a la même contribution, à savoir K. En conclusion, il y a égalité si et seulement si les $P(\omega)\omega^{-k}$ sont égaux (même argument et même module). Leur valeur commune est a_k. Donc $P(\omega) = a_k\omega^k$, *i.e.* $P - a_k X^k$ s'annule sur tout $\mathbb{U}_n$. Puisque $P - a_k X^k$ est de degré $\leqslant d < n$ et qu'il admet n racines, il est nul. Donc $P = a_k X^k$.

5) Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|P(z)| = \left|\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k z^k| = \sum_{k=0}^{d} |a_k|$. L'ensemble $\{|P(z)| \;/\; z \in \mathbb{U}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par $\sum_{k=0}^{d} |a_k|$, d'où l'existence de $M(P)$. Si z est dans $\mathbb{U}_n$, alors $z \in \mathbb{U}$ donc $|P(z)| \leqslant M(P)$. Ainsi, $\max(\{|P(z)| \;/\; z \in \mathbb{U}_n\}) \leqslant M(P)$. Donc $|a_k| \leqslant M(P)$ d'après 4.(b).
L'égalité $|a_k| = M(P)$ impose une égalité dans 4.(b), c'est-à-dire que P est le monôme $a_k X^k$. La réciproque est vraie.
Remarque : si P est non constant, l'inégalité est stricte pour $k = 0$:

$$|P(0)| = |a_0| < M(P) = \sup(\{|P(z)| \;/\; z \in \mathbb{U}\}).$$

2. Le principe du maximum pour les polynômes

6) Introduisons $Q(X) = P(z_0 + rX) \in \mathbb{C}[X]$. Le polynôme Q est non constant. La remarque ci-dessus entraîne l'inégalité $|Q(0)| < \sup(\{|Q(a)| \;/\; a \in \mathbb{U}\})$. Mais $Q(0) = P(z_0)$ et $Q(a) = P(z)$ où $z = z_0 + ra$. Enfin, $|a| = 1 \iff |z - z_0| = r$. Donc

$$|P(z_0)| < \sup(\{|P(z)| \;/\; z \in \mathbb{C}\,,\; |z - z_0| = r\}).$$

3. Une majoration plus forte

7) Par définition, on a $\overline{P} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k$ et $\overline{P}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^{-k}$. Donc $X^d \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^{d-k} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_{d-k}} X^k$ appartient à $\mathbb{C}[X]$, puisque les puissances de X sont positives. Donc $Q \in \mathbb{C}[X]$.
Dans $Q(X) = P(X)\left[X^d \overline{P}\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{d} \overline{a_{d-k}} X^k\right)$, le coefficient devant X^d est

$$\sum_{k=0}^{d} a_k\, \overline{a_{d-(d-k)}} = \sum_{k=0}^{d} |a_k|^2.$$

8) Pour $z \in \mathbb{U}$, $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, donc $\frac{1}{z} = \overline{z}$. Ainsi, $\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. Puisque $|z|^d = 1$,

$$|Q(z)| = |P(z)||z|^d \left|\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right| = |P(z)|^2.$$

Donc $M(Q) = M(P)^2$.
En examinant le coefficient devant X^d dans Q, on a

$$\sum_{k=0}^{d} |a_k|^2 \leqslant M(Q) = (M(P))^2.$$

4. Minoration de $\sup_{[-1,1]} |P|$ pour P unitaire de degré d

9) D'après 4.(b) pour $k = d$ et $a_d = 1$, il y a égalité si et seulement si $P = X^d$.

10) Par l'inégalité triangulaire, pour $t \in [-1,1]$, $|P(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{d} |a_k|$. L'ensemble $\{|P(t)| \;/\; t \in [-1,1]\}$ est une partie majorée non vide de $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $N(P)$.

11) (a) On procède par récurrence double sur d. Pour $d = 0$ et $d = 1$, le résultat est clair. Supposons alors que pour un certain $d \in \mathbb{N}$, $T_d(\cos(t)) = \cos(dt)$ et $T_{d+1}(\cos(t)) = \cos((d+1)t)$. On en déduit que $T_{d+2}(\cos(t)) = 2\cos(t)\cos((d+1)t) - \cos(dt) = \cos((d+2)t)$, en utilisant $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ avec $a = (d+1)t$ et $b = t$.

(b) Montrons par récurrence double que, pour $d \geqslant 1$, T_d est de degré d et de coefficient dominant 2^{d-1}. Le résultat est vrai pour $d = 1$ et $d = 2$ puisque $T_1(X) = X$ et $T_2(X) = 2X^2 - 1$. Supposons le résultat établi aux rangs d et $d+1$. Ecrivons $T_d(X) = 2^{d-1}X^d + \ldots$ et $T_{d+1}(X) = 2^d X^{d+1} + \ldots$ où les points de suspension désignent des termes de degré moindre que le terme qui les précède. On a alors

$$\begin{aligned} T_{d+2}(X) &= 2XT_{d+1}(X) - T_d(X) \\ &= 2X(2^d X^{d+1} + \ldots) - 2^{d-1}X^d + \ldots \\ &= 2^{d+1}X^{d+2} + \ldots., \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

(c) Pour $t \in [-1,1]$, posons $\theta = \arccos(t)$. Alors

$$|S_d(t)| = |S_d(\cos(\theta))| = \frac{|\cos(d\theta)|}{2^{d-1}} \leqslant \frac{1}{2^{d-1}}$$

et $\frac{1}{2^{d-1}}$ est atteint lorsque $\theta = 0$ (*i.e.* $t = 1$) par exemple. D'où l'égalité $N(S_d) = \frac{1}{2^{d-1}}$.

12) (a) • En utilisant le binôme de Newton,

$$R(X) = X^d P\left(\frac{1}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right)\right) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{2^k} X^d \left(X + \frac{1}{X}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{2^k} \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^{d+k-2j} \right) \in \mathbb{C}[X].$$

Les expressions entre parenthèses sont bien des polynômes puisque les puissances de X sont positives (car pour $d \geqslant k \geqslant j$, $d+k-2j \geqslant 0$).

• Pour $k \in [\![0,d]\!]$, le polynôme $R_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^{d+k-2j}$ est de degré $d+k$ et de coefficient dominant $\binom{k}{0} = 1$. Puisque $R = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{2^k} R_k$, R est de degré et de coefficient dominant donné par le $\frac{a_k}{2^k} R_k$ de plus haut degré, à savoir $\frac{a_d}{2^d} R_d$. Donc $\deg(R) = 2d$ et le coefficient dominant de R est $\frac{a_d}{2^d} = \frac{1}{2^d}$.

(b) Pour $z \in \mathbb{U}$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{it}$. Ainsi,

$$|R(z)| = \left| e^{idt} P\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \right) \right| = \left| e^{idt} P(\cos t) \right| = |P(\cos t)|.$$

Quand θ décrit $\mathbb{R}$, z décrit $\mathbb{U}$ et $\cos(t)$ décrit $[-1,1]$. Donc

$$M(R) = \sup(\{|R(z)| \ / z \in \mathbb{U}\}) = \sup(\{|P(t)| \ / t \in [-1,1]\}) = N(P).$$

(c) Appliquons la question 3 avec $k = 0$ et $n = 2d$ au polynôme $R(X) \in \mathbb{C}_{2d}[X]$. En notant r_k les coefficients de R, on a

$$\frac{1}{2d} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_d} R(\omega) = \sum_{\substack{j=0 \mod 2d \\ 0 \leqslant j \leqslant 2d}} r_j = r_0 + r_{2d} = \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^d},$$

soit

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} R(\omega) = \frac{2d}{2^{d-1}}.$$

On a donc établi

$$\begin{aligned} \frac{2d}{2^{d-1}} = \left| \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} R(\omega) \right| &\leqslant \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} |R(\omega)| \\ &\leqslant 2d \sup(\{|R(z)| \ / z \in \mathbb{U}\}) \\ &\leqslant 2d M(R). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$N(P) = M(R) \geqslant \frac{1}{2^{d-1}}.$$

(d) Plaçons nous dans le cas où l'inégalité précédente est une égalité.

• On a $\left| \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} R(\omega) \right| = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} |R(\omega)|$. Ce cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire généralisée impose que les $R(\omega)$ non nuls ont tous le même argument, à savoir zéro puisque la somme $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} R(\omega) = \frac{2d}{2^{d-1}}$ est réelle.

• On a aussi l'égalité $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} |R(\omega)| = 2d \sup(\{|R(z)| \ / z \in \mathbb{U}\})$ donc les $|R(\omega)|$ ont la même valeur, à savoir $\sup(\{|R(z)| \ / z \in \mathbb{U}\})$.

• Finalement, si l'inégalité étudiée est une égalité, tous les $R(\omega)$ sont égaux. Comme $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2d}} R(\omega) = \frac{2d}{2^{d-1}}$, la valeur commune des $R(\omega)$ est $\frac{1}{2^{d-1}}$.

• Rappelons que $R = X^d P\left(\frac{1}{2}(X + \frac{1}{X}) \right)$. L'égalité $R(\omega) = \frac{1}{2^{d-1}}$ pour $\omega \in \mathbb{U}_{2d}$ s'écrit $(e^{\frac{ik\pi}{d}})^d P\left(\cos\left(\frac{k\pi}{d} \right) \right) = \frac{1}{2^{d-1}}$ pour $k \in [\![0, 2d-1]\!]$. L'application cos étant injective sur l'intervalle $[0,\pi]$, les d valeurs de $k \in [\![0, d-1]\!]$ donnent d valeurs différentes de $\cos\left(\frac{k\pi}{d} \right)$ sur lesquelles P et S_d coïncident. Comme P et S_d ont même coefficient dominant et même degré, leur différence est de degré inférieur à $d-1$ et admet au moins d racines, d'où l'égalité $P = S_d$.

5. Polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ majorés par 1 sur $\mathbb{U}_n$

13) Si $\deg(P) = d < n$, la formule (1) et l'inégalité triangulaire donnent, pour $k \in [\![0,d]\!]$, $|a_k| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |P(\omega)|$. Dans cette somme, un terme est nul et les $(n-1)$ autres sont majorés par 1, d'où le premier résultat. Comme P est à coefficients entiers, chaque $|a_k|$ est un entier positif, strictement plus petit que 1 donc nul. Ainsi, $P = 0$ et *a fortiori*, il s'annule sur chacune des racines de l'unité.

14) Etablissons ce résultat par récurrence sur le degré d de P, en reprenant l'algorithme de la division euclidienne.

• Si $d < n$, le quotient est nul et le reste vaut P. Ces deux polynômes sont bien à coefficients entiers.

• Si $d = n$, le quotient est a_d et le reste est $P - a_d(X^d - 1)$. De nouveau, ces polynômes sont à coefficients entiers.

• Supposons avoir prouvé jusqu'à un certain rang $d \geqslant n$ que le quotient et le reste d'un polynôme de degré d à coefficients dans $\mathbb{Z}$ divisé par $X^n - 1$ sont à coefficients entiers. Soit alors $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré $d+1$ et a_{d+1} son coefficient dominant. Le polynôme $P - a_{d+1} X^{d+1-n}(X^n - 1)$ est de degré au plus d et à coefficients entiers. Par hypothèse de récurrence, il existe Q_1 et R à coefficients entiers tels que

$$P - a_{d+1}X^{d+1-n}(X^n - 1) = (X^n - 1)Q_1 + R \text{ et } \deg(R) < n.$$

Donc

$$P = (X^n - 1)(a_{d+1}X^{d+1-n} + Q_1) + R \text{ et } \deg(R) < n.$$

Par unicité du reste et du quotient, $Q = a_{d+1}X^{d+1-n} + Q_1$ et R sont le quotient et le reste de P divisé par $X^n - 1$. Ces polynômes sont à coefficients entiers, ce qui achève la récurrence.

15) Pour $\omega \in \mathbb{U}_n$, on a $\omega^n = 1$, donc $P(\omega) = Q(\omega)(\omega^n - 1) + R(\omega) = R(\omega)$. Le polynôme R est à coefficients entiers, majoré par 1 sur $\mathbb{U}_n$ et s'annule au moins une fois sur $\mathbb{U}_n$ (tout comme P). De plus, $\deg(R) < n$. D'après la question 13, $R = 0$ donc $X^n - 1$ divise P et P s'annule sur toutes les racines n-ièmes de l'unité.

6. Interprétation de la formule (1) pour $k = 0$

16) • Rappelons que $z_0, \dots, z_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier centré en zéro signifie (quitte à renuméroter les z_i) qu'il existe une rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et de centre 0 envoyant z_0 sur z_1, z_1 sur z_2, ..., z_{n-2} sur z_{n-1} et z_{n-1} sur z_0, ce qui s'écrit $e^{i\frac{2\pi}{n}} z_k = z_{k+1}$ (avec la convention $z_n = z_0$) ou encore $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}} z_0$, pour tout $k \in \hat{\mathrm{E}}[\![0, n-1]\!]$. On en déduit que $z_k^n = z_0^n$. Notons $a = z_0^n \in \mathbb{C}^*$. Les n différents complexes $z_0, \dots, z_{n-1}$ sont racines du polynôme $X^n - a$ de degré n (on a donc toutes les racines). Réciproquement, il est clair que si $a \in \mathbb{C}^*$, les n racines de $X^n - a$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

• Prouvons maintenant l'égalité voulue. Remarquons que si λ et μ sont des complexes et si la formule est vraie pour P et Q dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, elle reste vraie pour $\lambda P + \mu Q$. Il suffit alors de montrer la formule pour $P = X^q$ pour $q \in [\![0, n-1]\!]$. Or, d'après la question 2,

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k^q = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} z_0\right)^q = z_0^q \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^q = \begin{cases} n & \text{si } q = 0; \\ 0 & \text{sinon}; \end{cases}$$

ce qui donne le résultat après division par n.

• En choisissant les z_i avec $z_0 = 1$, on retrouve la formule (1) pour $k = 0$.

17) (a) Déjà $Q = \mu \prod_{k=1}^{r} (X - b_k)^{p_k}$ convient d'après le cours. Montrons que ce sont les seuls. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\frac{Q'}{Q} = \sum_{k=1}^{r} \frac{p_k}{X - b_k}$. D'après le théorème fondamental de l'algèbre, $Q = \mu \prod_{k=1}^{s} (X - a_k)^{q_k}$ où les a_k sont des nombres complexes distincts et les q_k sont des entiers naturels non nuls. Mais alors $\frac{Q'}{Q} = \sum_{k=1}^{s} \frac{q_k}{X - a_k}$. Or par unicité de la décomposition en éléments simples, on a égalité (à l'ordre près) des a_k et b_k et des multiplicités correspondantes.

(b) Fixons $i \in [\![0, n-1]\!]$. Les zéros du polynôme φ_i sont les z_k pour $k \in [\![0, n-1]\!] - \{i\}$. Donc pour $j \in [\![0, n-1]\!] - \{i\}$, $\varphi_i(z_j) = 0$. Reste à étudier le cas $j = i$. On part de l'égalité $\varphi(X) = (X - z_i)\varphi_i(X)$ qui entraine $\varphi'(X) = \varphi_i(X) + (X - z_i)\varphi_i'(X)$. Donc $\varphi'(z_i) = \varphi_i(z_i.)$

(c) Le polynôme φ est de degré n, de coefficient dominant 1, donc φ' est de degré $n-1$, de coefficient dominant n et $\frac{X}{n}\varphi(X) + \varphi(0)$ est de degré n de coefficient dominant 1.

(d) Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. En appliquant la formue (2) à $P = \varphi_k$ de degré $n-1$, on a $\varphi_k(0) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} \varphi_k(z_l) \underset{17.(b)}{=} \frac{1}{n}\varphi'(z_k)$. Comme $\varphi = (X - z_k)\varphi_k$, on obtient $\varphi(0) = -z_k\varphi_k(0) = -z_k\frac{1}{n}\varphi'(z_k)$ donc $\frac{X}{n}\varphi'(X) + \varphi(0)$ s'annule en z_k, tout comme φ. On a trouvé n racines distinctes pour ces deux polynômes de degré n, on les a donc toutes, ce qui permet de conclure.

(e) Les polynômes $\frac{X}{n}\varphi'(X) + \varphi(0)$ et φ ont même degré, même coefficient dominant et les mêmes n racines $z_0, \dots, z_{n-1}$ et donc les racines ont même multiplicités puisqu'elles sont simples. Ils sont égaux.

(f) L'égalité précédente donne $\frac{\varphi'(X)}{\varphi(X) - \varphi(0)} = \frac{n}{X}$. On déduit de la question 17.(a) que $\varphi(X) - \varphi(0)$ admet 0 pour unique racine. Comme le polynôme φ a pour coefficient dominant 1 et pour degré n, on a $\varphi(X) - \varphi(0) = X^n$, soit $\varphi(X) = X^n + \varphi(0)$. Notons $a = -\varphi(0)$, non nul (sinon $z_0 = \dots = z_{n-1} = 0$). Les complexes $z_0, \dots, z_{n-1}$ sont les racines du polynôme $\varphi(X) = X^n - a$. Comme on l'a vu, $z_0, \dots z_{n-1}$ sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.