Exercice 1 : Soit f une fonction convexe croissante définie sur un intervalle $]a,+\infty[$ et non constante. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

♡ **Exercice 2 – Inégalité harmonico-arithmetico-géométrique** : Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leqslant (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

Exercice 3 * : Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, bornée et non-constante. Montrer qu'il existe deux réels x et y tels que $f''(x)f''(y) < 0$.

♡ **Exercice 4 *** : Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $\dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.

Exercice 5 : Soient a, $b > 1$; Montrer que $\ln \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{\ln a \ln b}$.

Exercice 6 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice 7 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe qui présente en $a \in I$ un minimum local. Montrer que f présente en a un minimum global.

Exercice 8 * : Soient I, J deux intervalles et $f : I \to J$ une fonction convexe strictement monotone surjective. Étudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 9 ** : Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que f est lipschitzienne sur tout segment inclus dans I.

Exercice 10 * : Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$. Montrer que $\ln f$ est convexe (*i.e.* f est logarithmiquement convexe) si et seulement si la fonction $x \mapsto \alpha^x f(x)$ est convexe pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 11 * : Soient C_1, C_2 deux parties convexes du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Montrer que l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$ est l'ensemble des segments $[x_1, x_2]$ avec $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$.

Exercice 12 * : Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 e^{f(t)}\mathrm{d}t$.

(Indication : penser aux sommes de Riemann.)

Exercice 13 * : Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$. (On rappelle que $0^0 = 1$.)

1. Montrer que g est continue.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n \in [0,1]$. Montrer que

$$\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)^{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}} \leqslant \frac{x_1^{x_1}+\cdots+x_n^{x_n}}{n}.$$

Exercice 14 : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 15 – Inégalités de Hölder et Minkowski** : Soient $p,q \in]1,+\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tous a, $b > 0$

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

2. Montrer que $t \mapsto t^p$ est convexe. En déduire l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

où les a_k et les b_k sont des réels positifs.

3. Montrer que $t \mapsto (1-t^{\frac{1}{p}})^p$ est convexe sur $[0,1]$. En déduire l'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

où les a_k et les b_k sont des réels positifs.

4. Montrer que pour toutes fonctions réelles continues f, g sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b fg \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$$

et

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{1/p}$$

Exercice 16 ** : Soit $a < b < c < d$ quatre réels et $f : [a, d] \to \mathbb{R}$. On suppose $f_{|[a,c]}$ et $f_{|[b,d]}$ convexes. Montrer que f est convexe.

Exercice 17 – Le théorème de Gaus-Lucas* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Soit $Z(P) = \{z_1, ..., z_p\}$ l'ensemble des racines distinctes de P. On note α_k la multiplicité de la racine z_k.

1. Rappeler la décomposition en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$.
2. Soit z une racine de P' n'appartenant pas à $Z(P)$. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j(z - z_j)}{|z - z_j|^2} = 0.$$

   En déduire que z est un barycentre à coefficients positifs des z_j.

3. En déduire que $Z(P') \subset C(Z(P))$ (théorème de Gauss-Lucas). Montrer en particulier que si D est un disque fermé contenant les racines de P, il contient les racines de P'.
4. (Sendov****) Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ de module $\leqslant 1$ et $P = (X - z_1) \cdots (X - z_n)$. Est-il vrai que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe un zéro de P' à distance $\leqslant 1$ de z_k ?

Exercice 18 *– Ulm 2017 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue de limite nulle en $+\infty$. Existe-t-il $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ convexe telle que $g \geqslant f$ et $g \underset{+\infty}{\to} 0$?

Exercice 19 – Quizz :

1. Soit I un intervalle, $\varepsilon > 0$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$ tel que $J = [x, x + \varepsilon] \subset I$, on a $f_{|J}$ convexe. A-t-on f convexe ?
2. Donner 8 caractérisations de la convexité pour une fonction 2 fois dérivable.
3. Donner une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe telle que $x \mapsto e^{-u(x)}$ ne soit pas convexe.
4. Donner une fonction convexe sur $[0, 1]$ et non continue. Est-ce possible sur $\mathbb{R}$?
5. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ? Et l'ensemble des matrices nilpotentes ?
6. Soit X une partie de E $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel. A-t-on $\mathrm{Conv}X = \cup_{a,b \in X}[a, b]$?
7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $x, y \in E$ distincts. Que dire de $\mathrm{Conv}\{x, y\}$? Et de $\mathrm{Bar}\{x, y\}$ ensemble des barycentres de x et y ?

Indications

Exercice 1. Minorer f au voisinage de $+\infty$ par une fonction affine grâce à l'inégalité des 3 pentes.

Exercice 2. La première inégalité se déduit de la seconde

Exercice 3. Raisonner par l'absurde et fixer deux réels $\alpha < \beta$ tels que $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Utiliser l'inégalité des trois pentes pour $x < \alpha$ et $\beta < x$ et trouver une contradiction avec la convexité de f ou $-f$.

Exercice 4. Utiliser la concavité de sin sur $[0, \pi/2]$ en remarquant que $\dfrac{\sin x}{x}$ est une pente.

Exercice 5. Passer au logarithme.

Exercice 6. On pourra interpréter les quantités comme des aires de trapèzes.

Exercice 7. On peut raisonner par l'absurde : si $f(c) < f(a)$, considérer b entre a et c suffisament proche de a.

Exercice 8. Faire un dessin ! On sera amener à distinguer suivant la monotonie de f.

Exercice 9. Considérer $[a, b] \subset I$ puis $[\alpha, \beta] \subset I$ tel que $[a, b] \subset]\alpha, \beta[$.

Exercice 10. Pour le sens difficile, choisir une bonne valeur de α de sorte que $\alpha^{(1-t)(x-y)} = f(y)^{1-t} f(x)^{t-1}$ et $\alpha^{t(y-x)} = f(y)^{-t} f(x)^t$.

Exercice 11. La partie difficile est de démontrer que l'ensemble des segments $[x_1, x_2]$ est convexe. Prendre un barycentre de deux barycentre, écrire la définition, et simplifier l'expression.

Exercice 13. 2. Utiliser la continuité et la convexité sur $]0, 1]$.

Exercice 15.

1. Utiliser la concavité de la fonction ln et remarquer que $\ln a = \dfrac{1}{p} \ln a^p$.
2. Utiliser l'inégalité

$$f\left(\frac{1}{\sum_j t_j} \sum_j t_j x_j\right) \leqslant \frac{1}{\sum_j t_j} \sum_j t_j f(x_j)$$

avec un bon choix de t_j et x_j.

3. Comme précédemment.
4. Utiliser des sommes de Riemann.

Exercice 17.

1. C'est du cours !
2. Multiplier par une quantité conjuguée.
3. Utiliser la caractérisation du cours de l'enveloppe convexe. Montrer qu'un disque (fermé ou ouvert) est convexe.

Solutions

Exercice 3. Par l'absurde. Puisque $f''(x)f''(y) \geqslant 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, f'' est de signe constant. Quitte à changer f en $-f$ (qui vérifie les mêmes hypothèses), on peut supposer f convexe. Puisque f est non constante, il existe $\alpha < \beta$ tels que $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Si $f(\alpha) < f(\beta)$, pour tout $x > \beta$, on a $\dfrac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta} \geqslant \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} =: c > 0$, et donc $f(x) - f(\beta) \geqslant c(x - \beta)$. Ce dernier terme tent vers $+\infty$ avec x, donc f tend vers $+\infty$ avec x. Ceci contredit le caractère borné de f. Si $f(\alpha) > f(\beta)$, on fait de même avec $x < \alpha$.

Exercice 4. L'inégalité $\sin x \leqslant x$ vient de ce que $\sin' 0 = 1$, et donc que la pente entre 0 et x est inférieure à 1. (On peut aussi invoquer la lipschitziannité ou le théorème des accroissements finis.) L'autre inégalité vient de l'inégalité des trois pentes en $0 < x < \pi/2$, qui donne $\dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \leqslant \dfrac{\sin \pi/2 - \sin 0}{\pi/2 - 0} = \dfrac{2}{\pi}$.

Exercice 11. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des segments $[x_1, x_2]$ avec $x_1 \in C_1, x_2 \in C_2$ et $\mathcal{U}$ l'enveloppe convexe de $C_1 \cup C_2$. Montrons que $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$: on a $[x_1, x_2] \subset \mathcal{U}$ et donc par réunion, $\mathcal{C} \subset \mathcal{U}$.

Pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que $\mathcal{C}$ est convexe (il contient déjà C_1 et C_2). Montrons que si $u \in]0, 1[$ et $y_1 \in C$, $y_2 \in C$, alors $z = (1-u)y_1 + uy_2 \in \mathcal{C}$. Soit $x_1, x_3 \in C_1$ et $x_2, x_4 \in C_2$, $s, t \in [0, 1]$ et $y_1 = (1-t)x_1 + tx_2$, $y_2 = (1-s)x_3 + sx_4$.

Si $s = t = 0$, on a $y_1 = x_1$ et $y_2 = x_3$, tous les deux dans C_1 ; donc z appartient à $\mathcal{C}$. De même si $s = t = 1$. On exclut ces deux cas dans la suite. Or

$$\begin{aligned}(1-u)y_1 + uy_2 &= (1-u)(1-t)x_1 + (1-u)tx_2 + u(1-s)x_3 + usx_4 \\ &= ((1-u)(1-t) + u(1-s))\frac{(1-u)(1-t)x_1 + u(1-s)x_3}{((1-u)(1-t) + u(1-s))} \\ &\quad + ((1-u)t + us)\frac{(1-u)tx_2 + usx_4}{((1-u)t + us)}.\end{aligned}$$

(Les dénominateurs sont nuls car $u \in [0, 1[$ et $(s, t) \neq (0, 0)$ et $\neq (1, 1)$.) Par convexité de C_1 et C_2,

$$z_1 = \frac{(1-u)(1-t)x_1 + u(1-s)x_3}{((1-u)(1-t) + u(1-s))}$$

et

$$z_2 = \frac{(1-u)tx_2 + usx_4}{((1-u)t + us)}$$

appartiennent respectivement à C_1 et C_2. Puisque $(1-u)(1-t) + (1-u)t + u(1-s) + us = 1$ et que ces termes sont positifs, $(1-u)y_1 + uy_2$ appartient au segment $[z_1, z_2]$.

Exercice 13.

1. La fonction g est continue sur $]0, 1]$ par composition. De plus, $\lim_{x \to 0, x > 0} e^{x \ln x} = 1$ par croissances comparées. D'où la continuité.
2. Montrons d'abord que la restriction de g à $]0, 1]$ est convexe. C'est le cas car $g = u \circ v$ avec u convexe et croissante et v convexe : on a bien

   $$v((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)v(x) + tv(y)$$

   par convexité de v, puis

   $$u \circ v((1-t)x + ty) \leqslant u((1-t)v(x) + tv(y))$$

   par croissance de u et enfin

   $$u((1-t)v(x) + tv(y)) \leqslant (1-t)u \circ v(x) + tu \circ v(y)$$

   par convexité de u.
   Il suffit de montrer que g est convexe. Or pour tous $x, y \in]0, 1]$ et tout $t \in [0, 1]$, $g((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)g(x) + tg(y)$. Par continuité, on peut faire tendre x et/ou y vers 0, et on obtient l'inégalité pour tous $x, y \in [0, 1]$.

Exercice 15. Remarquons que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ équivaut à $p + q = pq$.

1. Par concavité de ln, $\ln(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}) \geqslant \dfrac{1}{p}\ln a^p + \dfrac{1}{q}\ln b^q = \ln(ab)$. On passe ensuite à l'exponentielle.
2. On pose $t_j = b_j^q$ et $x_j = a_j b_j^{1-q}$. L'inégalité rappelée dans l'indication donne le résultat.
3. La fonction $t \mapsto (1 - t^{1/p})^{p-1} t^{1/p-1}$ est décroissante par produit de décroissantes positives. Donc $t \mapsto (1 - t^{\frac{1}{p}})^p$ est convexe sur $[0, 1]$. On pose ensuite $t_k = (a_k + b_k)^p$ et $x_k = \dfrac{a_k^p}{(a_k + b_k)^p}$. On a alors $t_k(1 - x_k^{1/p})^p = b_k^p$, ce qui permet de conclure.
4. On pose $x_k^{(n)} = a + k(b-a)/n$. On a alors

   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k)g(x_k) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |f(x_k)||g(x_k)| \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |f(x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |g(x_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

car $n^{1/p}n^{1/q} = n$. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, on obtient par continuité

$$\int_a^b fg \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}.$$

Exercice 16. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x < y < z$ dans $[a,d]$ tels que $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} > \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$. Quitte à retrancher à f une fonction affine (ce qui ne change pas la convexité), on peut supposer que $f(x) = f(z) = 0$. On peut aussi supposer sans nuire à la généralité que $x < b$ et $c < z$. Enfin, par symétrie des conditions $y = b$ et $y = c$, on suppose $y < c$.

Par croissance de la fonction pente en y sur $]y,c]$, on a $f(u) \geqslant f(y)$ si $u \in]y,c]$, car $\dfrac{f(u)-f(y)}{u-y} \geqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = \dfrac{f(y)}{y-x} > 0$ (convexité sur $[a,c]$). Choisissons u dans $]b,c[\cap]y,c]$. On a ainsi $f(c) \geqslant f(u)$ (encore la croissance de la fonction pente, cette fois en u) et $0 = f(z) < f(c)$. Mais alors

$$0 \geqslant \frac{f(z)-f(c)}{z-c} \geqslant \frac{f(c)-f(u)}{c-u} > 0.$$

Contradiction avec la convexité sur $[b,d]$.

On peut reformuler la preuve précédente. L'idée est que si f est convexe sur I contenant $x < y$ tels que $f(x) < f(y)$, alors f est strictement croissante sur $I \cap [y,+\infty[$. Dans notre cas, f doit être strictement croissante sur un intervalle $[u,c]$. Et par symétrie, strictement décroissante (grâce à $f(y) > f(z)$).

Exercice 17. 1. D'après le cours, si on note $z_1,..,z_p$ les racines distinctes de P et $\alpha_1,..,\alpha_p$ leurs multiplicités respectives, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{X - z_j}.$$

C'est bien une somme d'éléments simples associées à des pôles distincts.

2. On a

$$0 = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j}{z-z_j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j(\overline{z}-\overline{z_j})}{|z-z_j|^2}.$$

En passant au conjugué et en coupant la somme en deux, on a aussi

$$\sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j z}{|z-z_j|^2} = \sum_{j=1}^{p} \frac{\alpha_j z_j}{|z-z_j|^2}.$$

Donc z est le barycentre de la famille (z_j) pour les poids strictement positifs $\dfrac{\alpha_j}{|z-z_j|^2}$.

3. Soit z une racine de P'. Si z est aussi racine de P, alors $z \in C(Z(P))$. Si z n'est pas une racine de P, alors d'après la question précédente, $z \in B(Z(P)) = C(Z(P))$. Donc $Z(P') \subset C(Z(P))$.

Comme un disque fermé (ou ouvert) D est convexe, si $Z(P) \subset D$, alors $C(Z(P)) \subset D$. Donc $Z(P') \subset D$.