

Les différentes fonctions étudiées dans ce problème sont utilisées en traitement d'images pour obtenir une image de bonne qualité u à partir d'une image bruitée f . La régularisation quadratique présente l'avantage d'être très simple et très rapide, mais aussi le défaut de détruire les bords de l'image en donnant une impression de flou. La régularisation à croissance linéaire permet d'obtenir de bien meilleurs résultats de restauration. Malheureusement, elle implique aussi de savoir minimiser efficacement des fonctions non différentiables, ce qui augmente considérablement la difficulté du problème.

Fin de l'épreuve.

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)
Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Notations

- Soit $N \geq 2$. On considère $X = \mathbb{R}^N$ muni du produit scalaire euclidien usuel :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^N u_i v_i$$

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Si $u \in X$, on note u_i , $1 \leq i \leq N$, les composantes de u .

On note u^n le terme général d'une suite d'éléments de X .

On note $e = (1, \dots, 1)$ l'élément de X tel que $e_i = 1$ pour tout i .

- Dans tout le problème, on considère A une matrice de $M_N(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices carrées de taille N^2 à coefficients réels), de coefficients $A_{i,j}$.

On note A^* la matrice transposée de A .

On suppose que A n'est pas la matrice nulle, et vérifie la propriété suivante : $e \in \text{Ker } A$.

- On rappelle qu'on dit qu'une fonction $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur X si et seulement si pour tout $u \in X$, $v \in X$, et $t \in [0, 1]$, on a

$$F(tu + (1-t)v) \leq tF(u) + (1-t)F(v)$$

On dit qu'une fonction $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe sur X si et seulement si pour tout $u \in X$, $v \in X$, $u \neq v$, et $t \in]0, 1[$, on a

$$F(tu + (1-t)v) < tF(u) + (1-t)F(v)$$

- Si F est différentiable en $u \in X$, on rappelle que le gradient de F en u est donné par :

$$\nabla F(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(u) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_N}(u) \end{pmatrix}$$

- Si F est C^2 , on note $\nabla^2 F(u)$ la matrice hessienne de F . Il s'agit d'une matrice de $M_N(\mathbb{R})$, dont le coefficient en position i, j est donné par :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(u)$$

On admettra alors que F est strictement convexe si :

$$\langle \nabla^2 F(u)(v-u), v-u \rangle > 0$$

pour tout $u \in X$, $v \in X$, $u \neq v$.

5 Régularisation non différentiable

Si $u \in X$, on définit :

$$\|u\|_1 = \sum_{i=1}^N |u_i|$$

et

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i|$$

On considère l'application $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$H(u) = \frac{1}{2} \|f - u\|^2 + \|Au\|_1$$

Dans cette dernière partie, on suppose de plus que la matrice A est symétrique.

On s'intéresse au problème :

$$\text{Trouver } u \text{ dans } X \text{ tel que } H(u) = \min_{v \in X} H(v). \quad (4)$$

On considère l'ensemble K défini par :

$$K = \{Av \text{ tel que } \|v\|_\infty \leq 1\}$$

On admet qu'il existe un unique élément $w \in K$ tel que $\|f - w\| = d(f, K)$, où $d(f, K)$ désigne la distance euclidienne de f à K .

On admet aussi que si $z \in K$, alors $\langle f - w, z - w \rangle \leq 0$.

1. On considère l'application $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$L(u, v) = \frac{1}{2} \|f - u\|^2 + \langle v, Au \rangle$$

(a) Soit u un élément de X . Exprimer $\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} L(u, v)$ en fonction de H .

(b) Montrer que :

$$L(u, v) = \frac{1}{2} \|f - u - Av\|^2 - \frac{1}{2} \|f - Av\|^2 + \frac{1}{2} \|f\|^2$$

(c) Dans cette question, on admet que l'on a l'égalité :

$$\sup_{\|v\|_\infty \leq 1} \inf_{u \in X} L(u, v) = \inf_{u \in X} \sup_{\|v\|_\infty \leq 1} L(u, v) \quad (5)$$

Montrer que u est solution du problème (4) si et seulement si $u = f - w$.

2. Démontrer l'égalité (5).

avec $(A_\epsilon(u))_i = \sqrt{\epsilon^2 + (Au)_i^2}$. On définit :

$$\mathcal{G}(v, u) = G(u) + \langle v - u, \nabla G(u) \rangle + \frac{1}{2} \langle v - u, \mathcal{A}(u)(v - u) \rangle$$

avec $\mathcal{A}(u)$ élément de $M_N(\mathbb{R})$ donné par (on note I_N la matrice identité de $M_N(\mathbb{R})$) :

$$\mathcal{A}(u) = I_N + A^*C(u)$$

où $C(u) \in M_N(\mathbb{R})$ et si $1 \leq i, j \leq N$:

$$(C(u))_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{(A_\epsilon(u))_i}$$

On rappelle qu'on note u^n le terme général d'une suite d'éléments de X .

1. Montrer que pour tout u et v dans X , on a :

$$\langle Av, C(u)v \rangle \geq 0$$

2. Soit $u^0 \in X$. Montrer que la relation de récurrence suivante définit une suite (u^n) unique :

$$\mathcal{G}(u^{n+1}, u^n) = \min_v \mathcal{G}(v, u^n)$$

En déduire que la suite (u^n) ainsi définie vérifie :

$$0 = u^{n+1} - f + A^*C(u^n)u^{n+1}$$

3. Soit u et v deux éléments de X . Si $1 \leq i \leq N$, on pose $a_i = \sqrt{(A_\epsilon(u))_i}$ et $b_i = \sqrt{(A_\epsilon(v))_i}$.

(a) Montrer que :

$$a_i - b_i + \frac{1}{2} \frac{b_i^2 - a_i^2}{a_i} \geq 0$$

(b) Déduire de la question précédente que :

$$G(v) \leq \mathcal{G}(v, u)$$

4. Montrer que la suite $(u^{n+1} - u^n)$ converge.

5. Montrer que la suite (u^n) converge vers la solution du problème (3) notée u .

1 Convexité

On pourra admettre les résultats de cette première partie pour traiter les questions des parties suivantes.

1. Soit $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $F(u) \rightarrow +\infty$ si $\|u\| \rightarrow +\infty$.

(a) Montrer qu'il existe au moins un élément u dans X tel que

$$F(u) = \min_{v \in X} F(v).$$

(b) L'élément précédent u est-il en général unique? Si F est supposée de plus strictement convexe sur X , a-t-on unicité pour u ?

2. Soit F une fonction différentiable sur X .

(a) Montrer que si F est convexe, alors :

$$F(v) \geq F(u) + \langle \nabla F(u), v - u \rangle \quad (1)$$

pour tout (u, v) dans X^2 .

(b) Réciproquement, montrer que si pour tout (u, v) dans X^2 l'inégalité (1) est vérifiée, alors F est convexe.

Indication : on pourra introduire le point $w = u + t(v - u)$ pour $t \in [0, 1]$, et appliquer l'inégalité aux couples (w, u) et (w, v) .

3. Soit F une fonction différentiable sur X . Montrer que F est strictement convexe si et seulement si : $F(v) > F(u) + \langle \nabla F(u), v - u \rangle$ pour tout (u, v) dans X^2 avec $u \neq v$.

4. On suppose F différentiable sur X . On rappelle qu'une condition nécessaire pour que u puisse être un point de minimum de F est que $\nabla F(u) = 0$.

(a) La condition nécessaire $\nabla F(u) = 0$ est-elle en général suffisante pour que u soit un point de minimum de F ?

(b) Si on suppose de plus F convexe sur X , la condition nécessaire $\nabla F(u) = 0$ est-elle suffisante?

5. Soit F une fonction différentiable sur X .

(a) Montrer que si F est convexe, alors pour tout (u, v) dans X^2 on a :

$$\langle \nabla F(u) - \nabla F(v), u - v \rangle \geq 0 \quad (2)$$

(b) Réciproquement, montrer que si pour tout (u, v) dans X^2 l'inégalité (2) est vérifiée, alors F est convexe.

Indication : on pourra étudier les variations de la fonction

$$\phi(t) = (1 - t)F(u) + tF(v) - F((1 - t)u + tv)$$

6. Soit F une fonction C^2 sur X . Montrer que F est convexe si et seulement si pour tout (u, v) dans X^2 :

$$\langle \nabla^2 F(u)v, v \rangle \geq 0$$

2 Régularisation quadratique

Soit $\lambda \geq 0$, et $f \in X$. On considère l'application $F_\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F_\lambda(u) = \|f - u\|^2 + \lambda \|Au\|^2$$

1. Montrer que F_λ est C^2 sur X . Calculer $\nabla F_\lambda(u)$, puis $\nabla^2 F_\lambda(u)$.
2. Montrer que F_λ est convexe sur X . F_λ est-elle strictement convexe ?
3. Montrer qu'il existe exactement un élément u_λ dans X tel que $F_\lambda(u_\lambda) = \min_{v \in X} F_\lambda(v)$. Montrer que u_λ est caractérisé par la relation :

$$u_\lambda - f + \lambda A^* A u_\lambda = 0$$
4. (a) Que dire de la solution u_λ lorsque $\lambda \rightarrow 0$?
(b) Que dire de Au_λ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$?
5. Pour $i \in \{1, 2\}$, on note pour f_1 et f_2 dans X :

$$F_\lambda^i(u) = \|f_i - u\|^2 + \lambda \|Au\|^2$$

On note u_λ^i un point où F_λ^i atteint son minimum sur X .
Donner une majoration de $\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\|$ dépendant de $\|f_1 - f_2\|$.

3 Régularisation à croissance linéaire

Soit $\epsilon > 0$, et $f \in X$. On rappelle qu'on note $e = (1, \dots, 1)$ l'élément de X tel que $e_i = 1$ pour tout i . On considère l'application $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G(u) = \frac{1}{2} \|f - u\|^2 + \langle e, A_\epsilon(u) \rangle$$

avec $A_\epsilon(u) \in X$ et si $1 \leq i \leq N$:

$$(A_\epsilon(u))_i = \sqrt{\epsilon^2 + (Au)_i^2}$$

On rappelle qu'on note u^n le terme général d'une suite d'éléments de X . On considère le problème :

$$\text{Trouver } u \text{ dans } X \text{ tel que } G(u) = \min_{v \in X} G(v) \quad (3)$$

1. Montrer que G est différentiable. Calculer $\nabla G(u)$.
2. Montrer que le problème (3) admet une unique solution u dans X , et que cette solution u est caractérisée par la relation :

$$u - f + A^* B(u) = 0$$

avec $B(u) \in X$ et si $1 \leq i \leq N$:

$$(B(u))_i = \frac{(Au)_i}{(A_\epsilon(u))_i}$$

3. Soit $\tau \geq 0$.
Supposons un élément u^n fixé dans X . On considère l'application $G_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G_n(u) = \frac{\tau}{2} \|u - f\|^2 + \tau \langle e, A_\epsilon(u) \rangle + \frac{1}{2} \|u - u^n\|^2$$

Montrer qu'il existe un unique élément u^{n+1} dans X tel que $G_n(u^{n+1}) = \min_{u \in X} G_n(u)$, et que l'on a la relation suivante :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = -u^{n+1} + f - A^* B(u^{n+1})$$

4. On fixe u^0 dans X , et on considère la suite (u^n) définie par récurrence par la relation $G_n(u^{n+1}) = \min_{u \in X} G_n(u)$.
Montrer que la série $\sum \|u^n - u^{n+1}\|^2$ est convergente.
5. Montrer que la suite (u^n) est bornée.
6. En déduire que la suite (u^n) converge vers u unique solution du problème (3).
7. Dans le cas $\epsilon = 0$, G est-elle différentiable sur X ?

4 Méthode de type quasi-Newton

Soit $\epsilon > 0$ et $f \in X$. On rappelle que :

$$G(u) = \frac{1}{2} \|f - u\|^2 + \langle e, A_\epsilon(u) \rangle$$