**Corrigé du sujet ENS 2009 filière MP (4 heures)**

*L'auteur de ce corrigé remercie par avance les lecteurs qui voudront bien lui indiquer les erreurs qu'ils auront détectées.*

# 1 Convexité

1. (a) L'ensemble $K := \{v \in X \ : \ F(v) \leqslant F(0)\} = F^{-1}(]-\infty, F(0)])$ est un fermé de $X$ comme image réciproque du fermé $]-\infty, F(0)]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $F$. De plus $0 \in K$. Comme $F(v) \to +\infty$ quand $\|v\| \to +\infty$, il existe $A > 0$ tel que

$$\|v\| > A \Rightarrow F(v) > F(0).$$

Alors $K \subset B_f(0, A)$, donc $K$ est fermé et borné dans $X = \mathbb{R}^N$ : $K$ est compact. Comme $F$ est continue, il existe alors $u \in K$ tel que $F(u) = \min_{v\in K} F(v)$ puis, si $v \in X$ on a

• si $v \in K$ : $F(u) \leqslant F(v)$ par définition de $u$ ;

• si $v \notin K$ : $F(u) \leqslant F(0) < F(v)$ par définition de $u$ et $K$ (rappelons que $0 \in K$).

On a donc bien : $\forall\ v \in X, F(u) \leqslant F(v)$, d'où $F(u) = \min_{v\in X} F(v)$.

(b) ♢ L'élément $u$ de a) n'est en général pas unique :

• $F(x_1, \ldots, x_N) := x_1^2(1-x_1)^2 + \ldots + x_N^2(1-x_N)^2$ donne un contre-exemple polynomial puisque $F$ est positive, tend vers $+\infty$ en l'infini et $F(0) = 0 = F(e)$ (0 a même $2^n$ antécédents par $F$).

• Si $g$ est la fonction convexe affine par morceaux définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) := (-1-x)1_{]-\infty,-1]}(x) + (x-1)1_{[1,+\infty[}(x)$$

alors $F(x_1, \ldots, x_N) := \sum_{k=1}^N g(x_k)$ donne un contre-exemple convexe qui tend vers $+\infty$ en l'infini : $F$ est continue et convexe comme somme de fonctions continues et convexes, chaque fonction $x \mapsto g(x_k)$ étant continue et convexe comme composée de la $k$-ème projection (linéaire donc continue et affine) suivie de $g$ (une somme de fonctions convexes étant clairement convexe, et une composée d'une fonction affine suivie d'une fonction convexe étant convexe : analogue au début de 2) ci-après). De plus $F$ est positive, et $F(0) = 0 = F(e)$ (on a même $F^{-1}(\{0\}) = [-1, 1]^k$).

♢ Si $F$ est strictement convexe alors $u$ est unique : supposons en effet par l'absurde que $F$ atteint son minimum en $u$ et $v$ avec $v \neq u$. Alors par stricte convexité on a

$$F\left(\frac{1}{2}(u+v)\right) < \frac{F(u)+F(v)}{2} = F(u) = \min_{x\in X} F(x)$$

ce qui est absurde.

2. Lemme :
La fonction $F : X \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si :
$\forall\ a, x \in X$, la fonction $g_{a,x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto F(a + tx)$ est convexe.
Preuve :
$(\Rightarrow)$ : Si $a, x \in X, t, s \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$ :

$$g_{a,x}(\lambda t + (1-\lambda)s) = F(a + (\lambda t + (1-\lambda)s)x) = F[\lambda(a + tx) + (1-\lambda)(a + sx)]$$

$$\leqslant \lambda F(a + tx) + (1-\lambda)F(a + sx) \quad \text{(car } F \text{ est convexe)}$$

$$= \lambda g_{a,x}(t) + (1-\lambda) g_{a,x}(s)$$

ce qui prouve la convexité de $g_{a,x}$.
($\Leftarrow$) : Soit $u, v \in X$ et $t \in [0,1]$ :

$$F(tu + (1-t)v) = F(v + t(u-v)) = g_{v,u-v}(t) = g_{v,u-v}(t.1 + (1-t).0)$$
$$\leqslant t g_{v,u-v}(1) + (1-t) g_{v,u-v}(0) \quad \text{par convexité de } g_{v,u-v}$$
$$= tF(u) + (1-t)F(v)$$

ce qui prouve la convexité de $F$.

(a) Soit $u, v \in X$. La fonction $g_{u,v-u}$ du lemme étant convexe (d'une variable réelle) et dérivable car différentiable (comme composée d'une fonction affine suivie de $F$ différentiable), sa courbe est au-dessus de sa tangente en $(0, g_{u,v-u}(0))$ donc

$$F(v) = g_{u,v-u}(1) \geqslant g_{u,v-u}(0) + g'_{v,u-v}(0)(1-0) = F(u) + g'_{u,v-u}(0)$$

puis $F(v) \geqslant F(u) + \langle \nabla F(u), v-u \rangle$ puisque, si $t \in \mathbb{R}$, on a pour $a, x \in X$ :

$$g'_{a,x}(t) = \langle \nabla F(a + tx), x \rangle.$$

**Remarque :** Il est plus rapide ici de dire que si $t \in [0,1]$, on a par convexité de $F$ :

$$g_{u,v-u}(t) = F(tv + (1-t)u) \leqslant tF(v) + (1-t)F(u) = t g_{u,v-u}(1) + (1-t) g_{u,v-u}(0)$$

donc, si $t \in ]0,1]$, on a :

$$\frac{g_{u,v-u}(t) - g_{u,v-u}(0)}{t} \leqslant g_{u,v-u}(1) - g_{u,v-u}(0) = F(v) - F(u)$$

d'où, en faisant tendre $t$ vers $0$ : $g'_{u,v-u}(0) \leqslant F(v) - F(u)$, ce qui donne le résultat plus simplement, mais cette méthode ne permet pas de résoudre la question 3 plus difficile, pour laquelle le lemme nous sera utile.

(b) Soit $u, v \in X$ et $t \in [0,1]$. Notons $w := u + t(v-u) = (1-t)u + tv$ : d'après (1) appliquée au couple $(w, u)$ on a

$$(A) : F(u) \geqslant F(w) + \langle \nabla F(w), u - w \rangle = F(w) + t\langle \nabla F(w), u - v \rangle$$

car $u - w = t(u-v)$ et d'après (1) appliquée au couple $(w, v)$ on a

$$(B) : F(v) \geqslant F(w) + \langle \nabla F(w), v - w \rangle = F(w) + (1-t)\langle \nabla F(w), v - u \rangle$$

car $v - w = (1-t)(v-u)$. $(1-t)(A) + t(B)$ donne alors l'inégalité

$$(1-t)F(u) + tF(v) \geqslant F(w) = F((1-t)u + tv)$$

qui prouve la convexité de $F$. On remarque de plus que si dans (1) on a inégalité stricte lorsque $u \neq v$, on obtient si $u, v \in X$ avec $u \neq v$ et $t \in ]0,1[$ :

$$(1-t)F(u) + tF(v) > F((1-t)u + tv)$$

(car il y a inégalité stricte dans $(A)$ et dans $(B)$) ce qui donne alors la stricte convexité de $F$, soit la moitié de la question 3.

3. ($\Leftarrow$) a été vu à la fin de 2)b). Pour ($\Rightarrow$) soit $u, v \in X$ avec $u \neq v$. Fixons $s \in ]0,1[$ (par exemple $s = 0.5$) : en remplaçant $\leqslant$ par $<$ grâce à la stricte convexité de $F$, on obtient comme dans la remarque de 2)a) :

$$\frac{g_{u,v-u}(s) - g_{u,v-u}(0)}{s} < F(v) - F(u).$$

$F$ étant convexe (car strictement convexe), la fonction $g_{u,v-u}$ du lemme est convexe (d'une variable réelle), d'où, par la croissance des pentes, pour $t \in ]0, s]$ :

$$\frac{g_{u,v-u}(t) - g_{u,v-u}(0)}{t} \leqslant \frac{g_{u,v-u}(s) - g_{u,v-u}(0)}{s}$$

puis, en faisant tendre $t$ vers 0 :

$$g'_{u,v-u}(0) \leqslant \frac{g_{u,v-u}(s) - g_{u,v-u}(0)}{s}.$$

Or, $g'_{u,v-u}(0) = \langle \nabla F(u), v - u\rangle$, et $\dfrac{g_{u,v-u}(s) - g_{u,v-u}(0)}{s} < F(v) - F(u)$, donc

$$\langle \nabla F(u), v - u\rangle < F(v) - F(u)$$

comme souhaité.

**Remarque :** Le lemme n'est nullement indispensable, il permet juste d'utiliser des propriétés des fonctions convexes d'une variable réelle au programme de première année. Pour traiter cette question sans le lemme il suffit de prouver l'inégalité de croissance des pentes dans ce contexte, ce qui se fait comme pour les fonctions convexes d'une variable réelle.

4. (a) Non, il suffit de considérer $F(x_1, \ldots, x_N) := x_1^3 + \ldots + x_N^3$ pour avoir un contre exemple puisque $F$ n'a pas d'extremum local en 0 mais $\nabla F(0) = 0$, ou bien $F(x_1, \ldots, x_N) := (x_1^2 - 1)^2 + \ldots (x_N^2 - 1)^2$ pour avoir un contre-exemple où $F$ est positive et tend vers $+\infty$ en l'infini : $\nabla F(0) = 0$ mais $F$ a un maximum local strict égal à $N$ en 0, le minimum de $F$ étant 0 qui est atteint en $e$ (et a $2^n$ antécédents).

   (b) D'après (1), si $\nabla F(u) = 0$, on a pour tout $v \in X$ : $F(v) \geqslant F(u)$, donc $F$ atteint son minimum en $u$.

5. (a) Soit $u, v \in X$ : par (1) pour le couple $(u, v)$ on a :

$$(A) : \langle \nabla F(u), v - u\rangle \leqslant F(v) - F(u)$$

   et par (1) pour le couple $(v, u)$ on a :

$$(B) : \langle \nabla F(v), u - v\rangle \leqslant F(u) - F(v).$$

   $(A) + (B)$ donne alors l'inégalité

$$\langle \nabla F(v) - \nabla F(u), u - v\rangle \leqslant 0$$

   qui permet de conclure.

   (b) Soit $u, v \in X$ : si $t \in [0, 1]$ et $g_{u,v-u}$ est la fonction du lemme on a

$$g'_{u,v-u}(t) = \langle \nabla F(u + t(v - u)), v - u\rangle$$

   donc

$$g'_{u,v-u}(t) - g'_{u,v-u}(0) = \langle \nabla F(u + t(v - u)) - \nabla F(u), v - u\rangle \geqslant 0 :$$

en effet, c'est évident si $t = 0$, et si $t > 0$ on a par (2) :

$$\langle \nabla F(u + t(v - u)) - \nabla F(u), v - u \rangle = \frac{1}{t} \langle \nabla F(u + t(v - u)) - \nabla F(u), t(v - u) \rangle \geqslant 0.$$

Ainsi, pour $t \in [0, 1]$ on a $g'_{u,v-u}(t) \geqslant g'_{u,v-u}(0)$, d'où, par le théorème des accroissements finis (la fonction $g_{u,v-u}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$) :

$$g_{u,v-u}(1) - g_{u,v-u}(0) \geqslant g'_{u,v-u}(0)$$

*i.e.*

$$F(v) - F(u) \geqslant \langle \nabla F(u), v - u \rangle$$

ce qui donne la convexité de $F$ d'après 2)b) puisque (1) est vraie.

6. ($\Rightarrow$) : Soit $u, v \in X$ et $n \in \mathbb{N}^*$ : la fonction $F_n = F + \frac{1}{n}\|.\|^2$ est strictement convexe comme somme de la fonction convexe $F$ et de la fonction $\frac{1}{n}\|.\|^2$ strictement convexe par le critère admis page 2, puisque sa matrice hessienne est $\frac{1}{n}I_N$ en tout point. Par le critère de la page 2 on a alors $\langle \nabla^2 F_n(u)v, v \rangle \geqslant 0$, *i.e.* $\langle \nabla^2 F(u)v, v \rangle + \frac{1}{n}\|v\|^2 \geqslant 0$, ce qui permet de conclure en faisant tendre $n$ vers $+\infty$.
($\Leftarrow$) : Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$ : $F_n := F + \frac{1}{n}\|.\|^2$. Si $v \in X$ avec $v \neq 0$ on a :

$$\langle \nabla^2 F_n(u)v, v \rangle = \langle \nabla^2 F(u)v, v \rangle + \frac{1}{n}\|v\|^2 \geqslant \frac{1}{n}\|v\|^2 > 0$$

donc $F_n$ est strictement convexe d'après le critère admis page 2, donc convexe, puis $F$, qui est la limite simple de la suite $(F_n)_{n \geqslant 1}$, est convexe car si $u, v \in X$ et $t \in [0, 1]$, en faisant tendre $n$ vers $+\infty$ dans l'inégalité de convexité pour $F_n$ :

$$F_n(tu + (1 - t)v) \leqslant tF_n(u) + (1 - t)F_n(v)$$

il vient :

$$F(tu + (1 - t)v) \leqslant tF(u) + (1 - t)F(v).$$

**Remarque :** On peut déduire cette question de la 5), voir par exemple le problème 3 page 339 du Gourdon où on trouvera les questions 2, 5 et 6 de cette partie (et bien davantage).

# 2 Régularisation quadratique

1. • Si $v = (v_1, \ldots, v_n) \in X$ on a $\|v\|^2 = v_1^2 + \ldots + v_N^2$ donc $\|.\|^2$ est une fonction polynômiale, *a fortiori* de classe $C^2$, sur $X$.
$F_\lambda$ est alors de classe $C^2$ sur $X$ comme somme et composée de fonctions de classe $C^2$ sur $X$ (la fonction $u \mapsto Au$ étant linéaire, donc de classe $C^2$ sur $X$).
• Fixons $u \in X$. Pour $h \in X$ on a

$$F_\lambda(u+h) = \|f - u - h\|^2 + \lambda\|A(u+h)\|^2 = \|f - u\|^2 - 2\langle f - u, h \rangle + \lambda\|Au + Ah\|^2 + O(\|h\|^2)$$

$$= \|f - u\|^2 + 2\langle u - f, h \rangle + \lambda\|Au\|^2 + 2\lambda\langle Au, Ah \rangle + O(\|h\|^2)$$

$$= F_\lambda(u) + \langle 2(u - f + \lambda A^* Au), h \rangle + O(\|h\|^2)$$

puisque, $A$ étant linéaire, on a $\|Ah\| = O(\|h\|)$ et $\langle Au, Ah \rangle = \langle A^* Au, h \rangle$.
On en déduit que $\nabla F_\lambda(u) = 2(u - f + \lambda A^* Au)$, puis $\nabla^2 F_\lambda(u) = 2(I_N + \lambda A^* A)$ (car la différentielle d'une application linéaire $\phi$ en tout point est égale à $\phi$).

2. Si $u \in X$ et $x \in X \backslash \{0\}$ on a, $\lambda$ étant positif :
$$\langle \nabla^2 F_\lambda(u)x, x\rangle = 2\left(\langle x, x\rangle + \lambda\langle A^*Ax, x\rangle\right)$$
$$= 2\left(\langle x, x\rangle + \lambda\langle Ax, Ax\rangle\right) = 2\left(\|x\|^2 + \lambda\|Ax\|^2\right) \geqslant 2\|x\|^2 > 0.$$
D'après le critère admis page 2 : $F_\lambda$ est strictement convexe, *a fortiori* convexe.
3. • $F_\lambda$ est continue (car de classe $C^2$), strictement convexe sur $X$ et tend vers $+\infty$ en l'infini car $F_\lambda \geqslant d(f, .)^2$ qui tend vers $+\infty$ en l'infini, puisque si $\|u\| \geqslant 2\|f\|$ on a par l'inégalité triangulaire :
$$\|f - u\| \geqslant \|u\| - \|f\| \geqslant \frac{\|u\|}{2}.$$
D'après **1 -** 1) a) et b) : $\exists\,!\ u_\lambda \in X, F_\lambda(u_\lambda) = \min_{v\in X} F_\lambda(v)$.
• D'après **1 -** 4) : $u_\lambda$ est caractérisé par $\nabla F_\lambda(u_\lambda) = 0$, soit $u_\lambda - f + \lambda A^*Au_\lambda = 0$ cf. 1).
4. (a) La matrice $I_N+\lambda A^*A$ est symétrique définie positive (cf. calcul de 2)) donc inversible. L'équation de 3) donne alors : $u_\lambda = (I_N + \lambda A^*A)^{-1}f$.
On a $I_N + \lambda A^*A \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} I_N$, et l'application inverse $(GL_N(\mathbb{R}) \to GL_N(\mathbb{R}), M \mapsto M^{-1})$ est continue, donc $(I_N + \lambda A^*A)^{-1} \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} I_N^{-1} = I_N$, puis $u_\lambda \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} I_N f = f$.
(b) $F_\lambda$ atteint son minimum en $u_\lambda$ donc $F_\lambda(u_\lambda) \leqslant F_\lambda(0) = \|f\|^2$ d'où
$$\|Au_\lambda\|^2 \leqslant \frac{\|f\|^2 - \|f - u_\lambda\|^2}{\lambda} \leqslant \frac{\|f\|^2}{\lambda}$$
ce qui entraîne que $Au_\lambda \underset{\lambda\to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. On a vu en 4)a) que $u_\lambda^i = (I_N + \lambda A^*A)^{-1}f_i$ donc :
$$\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\| = \left\|(I_N + \lambda A^*A)^{-1}(f_1 - f_2)\right\| \leqslant \left\|(I_N + \lambda A^*A)^{-1}\right\| \|f_1 - f_2\|.$$
Si $x \in X$ on a :
$$\|(I_N + \lambda A^*A)x\|^2 = \|x + \lambda A^*Ax\|^2 = \|x\|^2 + \lambda^2\|A^*Ax\|^2 + 2\langle x, A^*Ax\rangle$$
$$= \|x\|^2 + \lambda^2\|A^*Ax\|^2 + 2\langle Ax, Ax\rangle = \|x\|^2 + \lambda^2\|A^*Ax\|^2 + 2\|Ax\|^2 \geqslant \|x\|^2$$
donc, si $v \in X$ on a :
$$\left\|(I_N + \lambda A^*A)^{-1}v\right\| \leqslant \left\|(I_N + \lambda A^*A)\left[(I_N + \lambda A^*A)^{-1}v\right]\right\| = \|v\|,$$
d'où : $\|u_\lambda^1 - u_\lambda^2\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$.
De plus, cette majoration est optimale, puisque, si $\lambda = 0$, on a $u_\lambda = f$ (cf. aussi 4)a) si on impose $\lambda > 0$).

# 3 Régularisation à croissance linéaire

1. • On a vu que la fonction $u \mapsto \frac{1}{2}\|f - u\|^2$ est polynômiale, donc différentiable, de gradient au point $u$ le vecteur $u - f$ (cf. **2 -** 1)).
Pour $i \in [1, N]$, l'application $u \mapsto (Au)_i$ est linéaire, donc différentiable sur $X$, et la fonction $\varphi : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\varepsilon^2 + x^2})$ est dérivable, donc différentiable, puis $u \mapsto (A_\varepsilon(u))_i$ est différentiable sur $X$ comme composée d'applications différentiables.
Comme pour $u \in X$ on a $\langle e, A_\varepsilon(u)\rangle = \sum_{i=1}^N (A_\varepsilon(u))_i$, on en déduit que $G$ est différentiable sur $X$ comme somme d'applications différentiables sur $X$.

• Fixons $u \in X$ et posons pour $t \in \mathbb{R}$ et $i, k \in [1, N]$ : $\psi_{i,k}(t) := (A_\varepsilon(u + te_k))_i$.
On a pour $t \in \mathbb{R}$ :

$$\psi_{i,k}(t) = \sqrt{\varepsilon^2 + (Au + tAe_k)_i^2} = \sqrt{\varepsilon^2 + ((Au)_i + tA_{i,k})^2}$$

$$= \sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2 + 2tA_{i,k}(Au)_i + t^2(A_{i,k})^2}$$

donc

$$\psi'_{i,k}(0) = \frac{A_{i,k}(Au)_i}{\sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2}} = (A^*)_{k,i}\frac{(Au)_i}{(A_\varepsilon(u))_i} = (A^*)_{k,i}B(u)_i$$

donc le gradient de l'application $u \mapsto \langle e, A_\varepsilon(u)\rangle = \sum_{i=1}^N (A_\varepsilon(u))_i$ au point $u$ est le vecteur

$$\left(\sum_{i=1}^N \psi'_{i,k}(0)\right)_{1\leqslant k\leqslant N} = \left(\sum_{i=1}^N (A^*)_{k,i}B(u)_i\right)_{1\leqslant k\leqslant N} = ((A^*B(u))_k)_{1\leqslant k\leqslant N} = A^*B(u)$$

puis $\nabla G(u) = u - f + A^*B(u)$.

2. Si $x \in \mathbb{R}$ on a, $\varphi$ désignant la fonction définie en 1) :

$$\varphi'(x) = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}}\ ,\ \varphi''(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + x^2}} - \frac{x^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 + x^2)^{3/2}} \geqslant 0.$$

Ainsi, $\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
Si $i \in [1, N]$, la fonction $u \mapsto (A_\varepsilon(u))_i$ est convexe comme composée de la fonction $u \mapsto (Au)_i$ linéaire, suivie de la fonction convexe $\varphi$ (analogue au lemme de **1 -** 2)).
$G$ est alors strictement convexe sur $X$ comme somme de la fonction strictement convexe $u \mapsto \frac{\|u-f\|^2}{2}$ et des fonctions convexes $u \mapsto (A_\varepsilon(u))_i$.
On a vu en **2 -** 3) que si $\|u\| \geqslant 2\|f\|$ alors $\|f - u\| \geqslant \frac{\|u\|}{2}$, donc :

$$G(u) \geqslant \frac{\|f-u\|^2}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\|u\|}{2}\right)^2 = \frac{\|u\|^2}{8}$$

donc $G$ tend vers $+\infty$ en l'infini.
D'après **1 -** 1) a) et b) : $\exists\,!\ u \in X, G(u) = \min_{v\in X} G(v)$ et d'après **1 -** 4) : $u$ est caractérisé par $\nabla G(u) = 0$, soit $u - f + A^*B(u) = 0$ cf. 1).

3. **Remarque :** Pour pouvoir diviser par $\tau$ il faut supposer $\tau > 0$.
• $G_n$ est somme de la fonction convexe $\tau G$ (car $\tau \geqslant 0$) et de la fonction strictement convexe $\theta : u \mapsto \frac{\|u-u^n\|^2}{2}$ (cf. **1 -** 6)) donc $G_n$ est strictement convexe.
• $G_n \geqslant \theta$ qui tend vers $+\infty$ en l'infini (cf. **2 -** 3)), donc $G_n$ tend vers $+\infty$ en l'infini.
• D'après **1 -** 1) a) et b) : $\exists\,!\ u^{n+1} \in X, G_n(u^{n+1}) = \min_{u\in X} G_n(u)$ et d'après **1 -** 4) : $u^{n+1}$ est caractérisé par $\nabla G_n(u^{n+1}) = 0$, soit par ce qui précède : $\tau\nabla G(u^{n+1}) + u^{n+1} - u^n = 0$, *i.e.* $\tau(u^{n+1} - f + A^*B(u^{n+1})) + u^{n+1} - u^n = 0$, ce qui équivaut à l'équation proposée lorsque $\tau > 0$.

4. Remarquons tout d'abord que d'après 3) la suite $(u^n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie.
Si $n \in \mathbb{N}$, on a par définition de $u^{n+1}$ :

$$G_n(u^{n+1}) = \min_{u\in X} G_n(u) \leqslant G_n(u^n) = \tau G(u^n)$$

donc :

$$\|u^n - u^{n+1}\|^2 = 2\left(G_n(u^{n+1}) - \tau G(u^{n+1})\right) \leqslant 2\tau\left(G(u^n) - G(u^{n+1})\right).$$

Alors, pour $k \in \mathbb{N}$, on a (somme téléscopique) :

$$\sum_{n=0}^{k} \|u^n - u^{n+1}\|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{k} 2\tau \left(G(u^n) - G(u^{n+1})\right) = 2\tau \left(G(u^0) - G(u^{k+1})\right) \leqslant 2\tau G(u^0)$$

(car $G(u^{k+1}) \geqslant 0$) donc la série proposée, dont le terme général est positif, est convergente (de somme $\leqslant 2\tau G(u^0)$).

5. Si $u \in X$ et $i \in [1, N]$ on a

$$|(B(u))_i| = \frac{|(Au)_i|}{\sqrt{\varepsilon^2 + (Au)_i^2}} \leqslant 1$$

donc $\|B(u)\|_\infty \leqslant 1$. La suite $(A^*B(u^{n+1}))_{n\geqslant 0}$ est donc à valeurs dans $\{A^*x \ : \ \|x\|_\infty \leqslant 1\}$ qui est borné (car $A^*$ est linéaire, donc continue, puisque $X$ est de dimension finie) donc elle est bornée. La suite $\left(\frac{u^{n+1}-u^n}{\tau}\right)_{n\geqslant 0}$ tend vers 0 puisque $\|u^{n+1} - u^n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après 5) (le terme général d'une série convergente converge vers 0), donc elle est bornée et cf. 3), $(u^{n+1})_{n\geqslant 0}$ est bornée comme différence de suites bornées, d'où le résultat.

**Remarque :** Si $u_n = \log(n)$ on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $u_{n+1} - u_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ est de carré sommable donc cette question n'est pas conséquence uniquement de la précédente.

6. Soit $\alpha \in X$ une valeur d'adhérence de $(u^n)_{n\geqslant 0}$ et $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u^{j(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. $B$ étant continue (car pour $i \in [1, N]$ la fonction $u \mapsto B(u)_i$ est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur, $\geqslant \varepsilon$, ne s'annule pas) on a $B(u^{j(n)+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} B(\alpha)$ puis, par continuité de $A^*$, $A^*B(u^{j(n)+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A^*B(\alpha)$ et d'après 3) :

$$\alpha - f + A^*B(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \left(u^{j(n)+1} - f + A^*B\left(u^{j(n)+1}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{u^{j(n)} - u^{j(n)+1}}{\tau} = 0$$

(suite extraite de la suite $\left(\frac{u^n-u^{n+1}}{\tau}\right)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers 0) donc, cf. 2) : $\alpha = u$.

La suite bornée (donc à valeurs dans un espace métrique compact, l'espace normé $X = \mathbb{R}^N$ étant de dimension finie) $(u^n)_{n\geqslant 0}$ admet $u$ pour unique valeur d'adhérence, donc elle converge vers $u$, l'unique solution de (3).

7. Si $\varepsilon = 0$ on a pour $u \in X$ : $G(u) = \frac{\|f-u\|^2}{2} + \|Au\|_1$.

   Supposons par l'absurde que $G$ est différentiable. La fonction $u \mapsto \frac{\|f-u\|^2}{2}$ étant différentiable, la fonction $u \mapsto \|Au\|_1$ est alors différentiable comme différence de fonctions différentiables. Soit $x \in X$ tel que $Ax \neq 0$ ($A$ est non nulle) : alors la fonction $\theta : (\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \|A(tx)\|_1)$ est différentiable (comme composée d'applications différentiables), donc dérivable.

   Or, si $t \in \mathbb{R}$, on a $\theta(t) = |t|\|Ax\|_1$ avec $\|Ax\|_1 \neq 0$, donc la fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}$ : c'est absurde puisqu'elle n'est pas dérivable en 0.

   Ainsi, $G$ n'est pas différentiable.

# 4 Méthode de type quasi-Newton

1. Soit $u, v \in X$. Si $D(u)$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $1/A_\epsilon(u)_i$ (donc $> 0$) on a $C(u) = D(u)A$, donc $A^*C(u) = A^*D(u)A$ est symétrique et positive, d'où :

$$\langle Av, C(u)v\rangle = \langle v, A^*C(u)v\rangle \geqslant 0.$$

2. ♡ Fixons $u \in X$ et montrons que $\exists\ !\ v_0 \in X, \mathcal{G}(v_0, u) = \min_{v \in X} \mathcal{G}(v, u)$.
   • Considérons $\phi : X \to \mathbb{R}, v \mapsto \mathcal{G}(v, u)$ : pour $v \in X$ on a

$$\phi(v) = \varphi(u) + \langle v, \nabla G(u)\rangle + \frac{1}{2}\left(\langle v, \mathcal{A}(u)v\rangle - \langle v, \mathcal{A}(u)u\rangle - \langle u, \mathcal{A}(u)v\rangle\right)$$

$$= \varphi(u) + \langle v, \nabla G(u)\rangle + \frac{1}{2}\left(\langle v, \mathcal{A}(u)v\rangle - \langle v, \mathcal{A}(u)u\rangle - \langle \mathcal{A}(u)^* u, v\rangle\right)$$

$$= \varphi(u) + \left\langle v, \nabla G(u) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(u)u - \frac{1}{2}\mathcal{A}(u)^* u\right\rangle + \frac{1}{2}\langle v, \mathcal{A}(u)v\rangle$$

où

$$\varphi(u) := G(u) - \langle u, \nabla G(u)\rangle + \frac{1}{2}\langle u, \mathcal{A}(u)u\rangle.$$

$\phi$ est donc de classe $C^2$ sur $X$ comme somme d'une application affine et d'une forme quadratique, et pour $v \in X$ on a :

$$\nabla\phi(v) = \nabla G(u) - \frac{1}{2}\mathcal{A}(u)u - \frac{1}{2}\mathcal{A}(u)^* u + \frac{1}{2}(\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(u)^*)v$$

$$= \nabla G(u) + \frac{1}{2}(\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(u)^*)(v - u)$$

car si $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ on a pour $h \in X$ :

$$\langle v + h, B(v + h)\rangle = \langle v, Bv\rangle + \langle h, Bv\rangle + \langle v, Bh\rangle + \langle h, Bh\rangle$$

$$= \langle v, Bv\rangle + \langle h, Bv\rangle + \langle B^* v, h\rangle + O\left(\|h\|^2\right) = \langle v, Bv\rangle + \langle h, (B + B^*)v\rangle + O\left(\|h\|^2\right)$$

puisque $\langle v, Bh\rangle = \langle B^* v, h\rangle$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle h, Bh\rangle| \leqslant \|h\|\|Bh\| \leqslant \|B\|\|h\|^2.$$

Comme $\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(u)^* = 2I_N + A^*C(u) + (A^*C(u))^* = 2(I_N + A^*C(u))$ car $A^*C(u)$ est symétrique, on obtient d'après ce qui précède et **3 -** 1) :

$$\nabla\phi(v) = \nabla G(u) + v - u + A^*C(u)(v - u)$$

$$= v - f + A^*B(u) + A^*C(u)(v - u) = v - f + A^*C(u)v$$

car $A^*B(u) = A^*C(u)u$ puisque si $D(u) = \mathrm{diag}(1/A_\epsilon(u)_1, \ldots, 1/A_\epsilon(u)_n)$, on a
$B(u) = D(u)(Au) = (D(u)A)u = C(u)u$ (on a vu $D(u)A = C(u)$ en 1)).
• Alors, $\forall\ v \in X : \nabla^2\phi(v) = I_N + A^*C(u) = \mathcal{A}(u)$ (différentielle d'une application linéaire) est symétrique définie positive comme somme de la matrice symétrique définie positive $I_N$ et de la matrice symétrique $A^*C(u)$ qui est positive cf. 1).
D'après le critère admis page 2, $\phi$ est strictement convexe sur $X$.
• $\phi$ tend vers $+\infty$ en l'infini comme somme de la fonction affine

$$\varphi_1 : v \mapsto G(u) + \langle v - u, \nabla G(u)\rangle$$

et de la fonction

$$v \mapsto \frac{1}{2}\left(\|v - u\|^2 + \langle A(v - u), C(u)(v - u)\rangle\right)$$

qui est, cf. 1), supérieure en tout point à la fonction

$$\varphi_2 : v \mapsto \frac{1}{2}\|v - u\|^2$$

et $\varphi_1 + \varphi_2$ tend vers $+\infty$ en l'infini car son terme $\|v\|^2$ l'emporte sur sa partie affine.

• Ainsi, $\phi$ est continue, strictement convexe et tend vers $+\infty$ en l'infini.

D'après **1 -** 1) a) et b) : $\exists\ !\ v_0 \in X, \phi(v_0) = \min_{v\in X}\phi(v)$ et d'après **1 -** 4) : $v_0$ est caractérisé par $\nabla\phi(v_0) = 0$, soit $v - f + A^*C(u)v = 0$ par ce qui précède, ce qui donne le résultat puisque pour $v \in X$ on a $\phi(v) = \mathcal{G}(v,u)$.

♣ Par récurrence immédiate on déduit alors de ce qui précède l'existence et l'unicité d'une suite $(u^n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathcal{G}(u^{n+1},u^n) = \min_{v\in X}\mathcal{G}(v,u^n)$, et pour $n \in \mathbb{N}$ on a bien $u^{n+1} - f + A^*C(u^n)u^{n+1} = 0$.

3. (a) Montrons que si $x, y > 0$ on a $x - y + \dfrac{y^2 - x^2}{2x} \geqslant 0$ : en effet,

$$x - y + \frac{y^2-x^2}{2x} = \frac{(2x^2-2xy)+(y^2-x^2)}{2x} = \frac{x^2-2xy+y^2)}{2x} = \frac{(x-y)^2}{2x} \geqslant 0.$$

On en déduit le résultat demandé mais pour b) il faut $a_i = (A_\varepsilon(u))_i$ et $b_i = (A_\varepsilon(v))_i$.

(b) • Il s'agit de prouver que

$$\frac{\|f-v\|^2}{2} + \sum_{i=1}^N (A_\varepsilon(v))_i \leqslant \frac{\|f-u\|^2}{2} + \sum_{i=1}^N (A_\varepsilon(u))_i + \langle v-u, \nabla G(u)\rangle$$

$$+\frac{\|v-u\|^2}{2} + \frac{1}{2}\langle A(v-u), C(u)(v-u)\rangle.$$

• Or, cf. 1) :

$$\langle A(v-u), C(u)(v-u)\rangle = \langle A(v-u), D(u)A(v-u)\rangle = \sum_{i=1}^N \frac{(A(v-u))_i^2}{(A_\varepsilon(u))_i}\ ,$$

cf. **3 -** 1) : $\nabla G(u) = u - f + A^*B(u)$, donc

$$\langle v-u, \nabla G(u)\rangle = \langle v-u, u-f\rangle + \langle v-u, A^*B(u)\rangle$$
$$= \langle v,u\rangle + \langle u,f\rangle - \langle v,f\rangle - \|u\|^2 + \langle v-u, A^*B(u)\rangle$$

et

$$\|f-v\|^2 = \|f\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle f,v\rangle,\ \|f-u\|^2 = \|f\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle f,u\rangle,$$
$$\|v-u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle v,u\rangle$$

d'où :

$$\|f-u\|^2 + \|v-u\|^2 - \|f-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\langle f,v\rangle - 2\langle f,u\rangle - 2\langle v,u\rangle.$$

Alors :

$$\frac{\|f-u\|^2 + \|v-u\|^2 - \|f-v\|^2}{2} + \langle v-u, \nabla G(u)\rangle = \langle v-u, A^*B(u)\rangle$$

$$= \langle A(v-u), B(u)\rangle = \sum_{i=1}^N (A(v-u))_i (B(u))_i = \sum_{i=1}^N (A(v-u))_i \frac{(Au)_i}{(A_\varepsilon(u))_i}.$$

• Il s'agit donc de voir que $\displaystyle\sum_{i=1}^N \alpha_i \geqslant 0$, où, pour $i \in [1,N]$ :

$$\alpha_i = (A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{(A(v-u))_i}{2(A_\varepsilon(u))_i}[2(Au)_i + (A(v-u))_i]$$

$$= (A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{(Av)_i - (Au)_i}{2(A_\varepsilon(u))_i}[(Av)_i + (Au)_i]$$
$$= (A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{(Av)_i^2 - (Au)_i^2}{2(A_\varepsilon(u))_i}$$
$$= (A_\varepsilon(u))_i - (A_\varepsilon(v))_i + \frac{(A_\varepsilon(v))_i^2 - (A_\varepsilon(u))_i^2}{2(A_\varepsilon(u))_i}$$

est positif d'après a), ce qui permet de conclure.

4. Conséquence de 5.
5. • Remarquons tout d'abord que $(G(u^n))_{n\geqslant 0}$ est décroissante car, si $n \in \mathbb{N}$, on a d'après 3)b) et par définition de $u^{n+1}$ : $G(u^{n+1}) \leqslant \mathcal{G}(u^{n+1}, u^n) \leqslant \mathcal{G}(u^n, u^n) = G(u^n)$.
   On en déduit que $\forall\ n \in \mathbb{N}, G(u^n) \leqslant G(u^0)$ et la suite $(G(u^n))_{n\geqslant 0}$ converge vers un réel positif $\ell$ (car décroissante positive), puis par le théorème d'encadrement la suite $(\mathcal{G}(u^{n+1}, u^n))_{n\geqslant 0}$ converge également vers $\ell$, donc $\mathcal{G}(u^{n+1}, u^n) - G(u^n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   • On a vu en **3 - 2)** que $G$ tend vers $+\infty$ en l'infini. La suite $(u^n)_{n\geqslant 0}$ est donc bornée.
   • Soit $(\lambda, \mu) \in X^2$ une valeur d'adhérence de $((u^n, u^{n+1}))_{n\geqslant 0}$ et $j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante avec $u^{j(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et $u^{j(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu$. L'application $u \mapsto C(u)$ est continue (car si $i, j \in [1, N]$ l'application $u \mapsto C(u)_{i,j}$ est continue) donc $C\left(u^{j(n)}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} C(\lambda)$ puis, en faisant $n \to +\infty$ dans
$$u^{j(n)+1} - f + A^*C\left(u^{j(n)}\right)u^{j(n)+1} = 0$$
   il vient : $\mu - f + A^*C(\lambda)\mu = 0$.
   • Comme $G$ et $\mathcal{G}$ sont de même continues, de $\mathcal{G}(u^{j(n)+1}, u^{j(n)}) - G(u^{j(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on tire $\mathcal{G}(\mu, \lambda) - G(\lambda) = 0$ i.e. successivement :
$$\langle \mu - \lambda, \nabla G(\lambda)\rangle + \frac{1}{2}\langle \mu - \lambda, \mathcal{A}(\lambda)(\mu - \lambda)\rangle = 0\ ;$$
$$\langle \mu - \lambda, 2\nabla G(\lambda) + (I_N + A^*C(\lambda))(\mu - \lambda)\rangle = 0\ ;$$
$$\langle \mu - \lambda, 2\lambda - 2f + 2A^*B(\lambda) + \mu - \lambda + A^*C(\lambda)(\mu - \lambda)\rangle = 0$$
   puis en utilisant $A^*B(\lambda) = A^*C(\lambda)\lambda$ (cf. fin du premier paragraphe de 2)) :
$$\langle \mu - \lambda, \mu + \lambda - 2f + A^*C(\lambda)(\mu + \lambda)\rangle = 0$$
   soit, puisque $f = \mu + A^*C(\lambda)\mu$ (cf. point précédent) :
$$\langle \mu - \lambda, \lambda - \mu + A^*C(\lambda)(\lambda - \mu)\rangle = 0$$
   puis
$$\langle \lambda - \mu, \mathcal{A}(\lambda)(\lambda - \mu)\rangle = 0$$
   d'où $\lambda - \mu = 0$ puisque $\mathcal{A}(\lambda)$ est définie positive (cf. 2), second point).
   • On a donc $\mu = \lambda$, puis par ce qui précède, $\lambda - f + A^*B(\lambda) = \lambda - f + A^*C(\lambda)\lambda = 0$ : d'après **3 - 2)**, $\lambda$ est la solution $u$ du problème (3).
   • Ainsi, la suite bornée (donc à valeurs dans un espace métrique compact, l'espace normé $X^2$ étant de dimension finie) $((u^n, u^{n+1}))_{n\geqslant 0}$ admet $(u, u)$ pour unique valeur d'adhérence, donc elle converge vers $(u, u)$ où $u$ est l'unique solution de (3), *a fortiori* $(u^n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $u$.

# 5 Régularisation non différentiable

1. Notons $B$ la boule unité fermée de $X$ pour $\|.\|_\infty$.
   (a) Si $v \in B$ on a

$$\langle v, Au\rangle = \sum_{j=1}^{N} v_j (Au)_j \leqslant \sum_{j=1}^{N} |v_j||(Au)_j| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |(Au)_j| = \|Au\|_1$$

avec égalité si pour $j \in [1, N]$ on a $v_j \in \{-1, 1\}$ égal au signe de $(Au)_j$ *i.e.* défini par $v_j(Au)_j = |(Au)_j|$. Donc $\sup_{v\in B}\langle v, Au\rangle = \|Au\|_1$, puis

$$\sup_{v\in B} L(u, v) = H(u)$$

car si $E$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, alors $\sup(a+E) = a+\sup(E)$.
**Remarque :** On montre comme *supra* que si $x \in X$ on a $\sup_{v\in B}\langle v, x\rangle = \|x\|_1$.

   (b) Si $u, v \in X$ on a, en utilisant le fait que $A$ est symétrique pour la dernière égalité :

$$\|f - u - Av\|^2 = \|f - Av\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle f - Av, u\rangle$$

$$= \|f - Av\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle f, u\rangle + 2\langle Av, u\rangle = \|f - Av\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle f, u\rangle + 2\langle v, Au\rangle$$

donc

$$\|f\|^2 + \|f - u - Av\|^2 - \|f - Av\|^2 = \|f\|^2 + \|u\|^2 - 2\langle f, u\rangle + 2\langle v, Au\rangle$$

$$= \|f - u\|^2 + 2\langle v, Au\rangle = 2L(u, v)$$

ce qui permet de conclure.

   (c) Notons $G$ et $D$ les membres de gauche et droite de (5).
D'après a) on a $D = \inf_{u\in X} H(u)$ et d'après b), si $v \in B$ on a pour $u \in X$ :

$$L(u, v) = \frac{\|f - Av - u\|^2}{2} + L(f - Av, v) \geqslant L(f - Av, v)$$

(avec égalité si et seulement si $\|f - Av - u\|^2 = 0$ *i.e.* $u = f - Av$) donc :

$$\inf_{u\in X} L(u, v) = L(f - Av, v) = \frac{\|f\|^2 - \|f - Av\|^2}{2}$$

puis

$$G = \sup_{v\in B} \frac{\|f\|^2 - \|f - Av\|^2}{2} = \frac{\|f\|^2}{2} - \inf_{v\in B} \frac{\|f - Av\|^2}{2}$$

$$= \frac{\|f\|^2}{2} - \frac{d(f, K)^2}{2} = \frac{\|f\|^2}{2} - \frac{\|f - w\|^2}{2} = \langle f, w\rangle - \frac{\|w\|^2}{2}.$$

Alors, comme $G = D$ :

$$H(f - w) = D \Leftrightarrow H(f - w) = G \Leftrightarrow \frac{\|w\|^2}{2} + \|A(f - w)\|_1 = \langle f, w\rangle - \frac{\|w\|^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \|A(f - w)\|_1 = \langle f, w\rangle - \|w\|^2 \Leftrightarrow \|A(f - w)\|_1 = \langle f - w, w\rangle.$$

Or, on a vu en a) que $\|A(f - w)\|_1 = \sup_{v\in B}\langle v, A(f - w)\rangle$ donc, comme $A$ est symétrique :

$$\|A(f - w)\|_1 = \sup_{v\in B}\langle Av, f - w\rangle$$

puis

$$H(f-w) = D \Leftrightarrow \sup_{v\in B}\langle Av, f-w\rangle = \langle f-w, w\rangle$$

$$\Leftrightarrow \sup_{v\in B}(\langle f-w, Av\rangle - \langle f-w, w\rangle) \leqslant 0 \Leftrightarrow \sup_{v\in B}\langle f-w, Av-w\rangle \leqslant 0$$

ce qui est vrai d'après la propriété admise de $w$. Ainsi $f-w$ est solution de (4) et comme $H$ est continue, strictement convexe et tend vers $+\infty$ en l'infini, c'est l'unique solution de (4).

2. • $G \leqslant D$ : Il s'agit de prouver que l'ensemble

$$\left\{\inf_{u\in X} L(u,v) \ : \ v \in B\right\}$$

est majoré par $D$.
Considérons alors $v_0 \in B$ et montrons que $m := \inf_{u\in X} L(u, v_0) \leqslant D$ : il faut montrer que $m$ minore l'ensemble

$$\left\{\sup_{v\in X} L(u,v) \ : \ u \in X\right\}.$$

Soit donc $u_0 \in X$ : il faut voir que $m \leqslant \sup_{v\in X} L(u_0, v)$, ce qui est vrai car

$$m \leqslant L(u_0, v_0) \leqslant \sup_{v\in X} L(u_0, v).$$

Donc $G \leqslant D$ (et la preuve montre que cette inégalité est vraie pour toute fonction $L$ telle que les deux membres de (5) existent).
• $G \geqslant D$ :
♡ C'est l'inégalité difficile, qui est vraie grâce à la forme particulière de la fonction $L$. Pour l'établir nous allons construire un point-selle de $L$, *i.e.* $(u^*, v^*) \in X \times B$ tel que :

$$\forall\ (u,v) \in X \times B, L(u^*, v) \leqslant L(u^*, v^*) \leqslant L(u, v^*).$$

Alors

$$D \leqslant \sup_{v\in B} L(u^*, v) \leqslant L(u^*, v^*) \leqslant \inf_{u\in X} L(u, v^*) \leqslant G$$

ce qui permet de conclure.
♠ Soit $\varphi : B \to X, v \mapsto f - Av$ : on a vu en 1)c), comme conséquence de 1)b), que

$$\forall\ v \in B, L(\varphi(v), v) = \min_{u\in X} L(u,v)$$

(et si $v \in B$ et $u_0 \in X$ vérifient $L(u_0, v) = \min_{u\in X} L(u,v)$ alors $u_0 = f - Av = \varphi(v)$).
♣ Notons pour $v \in B,\ m(v) := L(\varphi(v), v) = \min_{u\in X} L(u,v)$ : on a vu en 1)c) que :

$$\forall\ v \in B, m(v) = \frac{\|f\|^2 - \|f - Av\|^2}{2}.$$

Ainsi $m$ est une fonction continue sur le compact $B$, donc $m$ atteint son maximum en $v^* \in B$. Posons $u^* := \varphi(v^*)$ et montrons que $(u^*, v^*)$ est un point-selle de $L$.
♢ On a déjà par définition de $\varphi$ et de $u^*$ :

$$\forall\ u \in X, L(u^*, v^*) = L(\varphi(v^*), v^*) \leqslant L(u, v^*).$$

♡ Fixons $v_0 \in B$ et montrons que $L(u^*, v_0) \leqslant L(u^*, v^*)$, ce qui achèvera la preuve.
Posons pour $n \in \mathbb{N}^*, w_n := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) v^* + \dfrac{1}{n} v_0$ : si $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|w_n\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|v^*\| + \frac{1}{n}\|v_0\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = 1$$

donc $w_n \in B$ (on vérifie de même que $B$ est convexe) et $m(v^*) \geqslant m(w_n)$.
$L$ étant affine par rapport à sa seconde variable, on obtient alors :

$$m(v^*) \geqslant m(w_n) = L(\varphi(w_n), w_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) L(\varphi(w_n), v^*) + \frac{1}{n} L(\varphi(w_n), v_0)$$

puis, comme $L(\varphi(w_n), v^*) \geqslant m(v^*)$ par définition de $m$ :

$$m(v^*) \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) m(v^*) + \frac{1}{n} L(\varphi(w_n), v_0)$$

*i.e.* $m(v^*) \geqslant L(\varphi(w_n), v_0)$. Comme $L$ et $\varphi$ sont continues et $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v^*$, on a $L(\varphi(w_n), v_0) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L(\varphi(v^*), v_0) = L(u^*, v_0)$, puis

$$L(u^*, v^*) = L(\varphi(v^*), v^*) = m(v^*) \geqslant L(u^*, v_0)$$

donc $L(u^*, v_0) \leqslant L(u^*, v^*)$ comme souhaité, ce qui termine la démonstration.

**Remarque :** On trouvera dans des livres d'optimisation et analyse convexe des théorèmes d'existence de points-selles et de mini-maximisation et dualité beaucoup plus généraux.

# 6 Conclusion

Très joli problème d'entraînement, parfait pour un devoir à la maison de fin de MP* !