Dans tout le texte, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

I. L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

(1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

(2) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ de τ dans la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.

(3) L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}.

(4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

(5) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.

(6) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

(7) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

(8) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

II. L'opérateur de différence Δ :

On s'intéresse dans ce problème à l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

(1) Expliquer que $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$. Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer $\deg(\Delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\Delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

(2) Déterminer $\ker \Delta$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note δ l'application induite par Δ sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.

(4) En déduire $\mathrm{Im}\,\Delta$.

(5) Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

(6) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

(7) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

(8) Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite complexe. Montrer l'équivalence entre :
- $\exists P \in \mathbb{C}_d[X],\ \forall j \in \mathbb{N},\ u_j = P(j)$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq d+1 \ \Rightarrow\ \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} u_j = 0$.

(9) On définit : $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = 0\}$.

a. Montrer que Δ réalise un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}\,\Delta$.

b. En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ vérifiant les relations

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \Delta(P_n) = P_{n-1}, \text{ et } P_n(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.

d. Montrer que la famille $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ constitue une base de $\mathbb{R}[X]$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer pour $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^k(P_n)$.

f. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ se décompose sous la forme $P = \sum_{n=0}^{p} \lambda_n P_n$ avec $\lambda_n = (\Delta^n(P))(0)$ (avec p un entier que l'on déterminera).

III. **Applications en combinatoire**

Pour tout couple (p,k) d'entiers naturels non nuls, on note $S(p,k)$ le nombre de surjections de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(p,0) = 0$.

(1) **Quelques cas particuliers**

a. Que vaut $S(p,n)$ pour $p < n$?

b. Déterminer $S(n,n)$.

c. Déterminer $S(n+1,n)$.

(2) **Recherche d'une expression générale**

a. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

b. Pour $p \geqslant n$, établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(p,k) \tag{6}$$

où $S(p,0) = 0$ par convention.

c. En déduire une expression générale de $S(p,n)$.

d. En utilisant la question II7, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

(3) Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

IV. **Polynômes de Hilbert :**

On définit les polynômes de Hilbert de la manière suivante : pour tout $k \geq 1$, $H_k(X) = \binom{X}{k} = \dfrac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$; et $H_0(X) = \binom{X}{0} = 1$.

(1) Montrer que les polynômes de Hilbert coïncident avec les polynômes (P_n) obtenus à la question II9, c'est-à-dire : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \binom{X}{n}$.

(2) Montrer que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à n, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{X}{k} (\Delta^k(P))(a)$.

Remarquons que cette formule peut être considérée comme l'analogue discrète de la formule de Taylor : $P(X+a) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{X^k}{k!} P^{(k)}(a)$ (l'opérateur de différence finie est l'analogue discret de la dérivée).

(3) Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On cherche à calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} Q(k)$ (analogue discret de l'intégration).

a. Trouver $W \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(W) = Q$.

b. Exprimer S_n en fonction de W.

c. Retrouver les formules connues pour $\sum_{k=0}^{n-1} k$, $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$, $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$.

V. **Polynômes à valeurs entières**

(1) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $H_n(k)$.

(2) En déduire que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.

(3) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\Delta(P)$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

(4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence entre :

(i) pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $P(k) \in \mathbb{Z}$

(ii) P est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ des polynômes de Hilbert.

(5) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\,P$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

(6) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d. Montrer que la série $\sum \dfrac{P(k)}{k!}$ converge et que sa somme est un multiple entier de e. Plus précisément montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{P(k)}{k!} = \alpha e$ avec $\alpha = \sum_{k=0}^{d} \dfrac{(\Delta^k(P))(0)}{k!} \in \mathbb{Z}$.

VI. **Sous-espaces stables par Δ :**

(1) On se place sur $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère de nouveau l'application δ, application induite par Δ sur $F = \mathbb{R}_n[X]$. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

a. Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b. En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

(2) En déduire les sous-espaces stables de $\mathbb{R}[X]$ par Δ.