I. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$.

(1) Que peut-on dire de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{n_0} = 0$?

On supposera désormais que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.
On dit que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie non nulle. On notera alors dans ce cas la valeur du produit : $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} P_n \in \mathbb{R}^*$.

(2) *Produit télescopique :* Dans le cas particulier où $a_n = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ avec $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, expliquer que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la suite x_n converge vers une limite non nulle.

(3) Expliquer que si le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge alors $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(4) Montrer que la réciproque est fausse (en exhibant un contre-exemple).

(5) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq n_0$, on note $\widetilde{P_n} = \prod_{k=n_0}^{n} a_k$. Montrer que la produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si $\widetilde{P_n}$ admet une limite finie non nulle (c'est-à-dire si et seulement si $\prod_{n\geq n_0} a_n$ converge).

(6) Montrer que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si $\prod_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{a_n}$ converge.

(7) Dans le cas où les a_n sont tous strictement positifs, montrer que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(a_n)$ converge.

II. On considère maintenant une suite de nombres réels $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, et on s'intéresse à la convergence des produits infinis $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ et $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-u_n)$. On lui associe donc les suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1-u_k) \text{ et } Q_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k).$$

(1) On suppose dans cette question : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \geq 0$.

a. On suppose que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge. Expliquer que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, puis que la série $\sum u_n$ converge.

b. Démontrer que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

(2) On suppose maintenant : $\forall k \in \mathbb{N},\ u_k \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.
En s'inspirant de la question précédente, montrer que le produit $\prod_{n\in\mathbb{N}}(1-u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

(3) Dans le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$ et où la série $\sum u_n$ diverge, quelles sont les limites de P_n et Q_n ? *On démontrera le résultat énoncé.*

(4) Les u_k sont maintenant de signe quelconque mais on suppose que la série $\sum |u_k|$ converge.

a. Montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ alors $\prod(1+u_n)$ converge.

b. Montrer que si, la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite nulle, l'un au moins des u_k est égal à -1. Et conclure sur la convergence de la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5) Dans le cas particulier où u_0 est égal à 1 et où u_k est égal à $\dfrac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ pour tout entier k supérieur ou égal à 1, étudier la convergence de la suite associée $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dans le cas général a-t-on : ($\sum u_n$ converge $\Rightarrow \prod_{n\in\mathbb{N}}(1+u_n)$ converge) ?

(6) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et que la série $\sum u_n$ converge. Expliquer que à partir d'un certain rang $1 + u_n > 0$ et en utilisant $(\ln(1+u_n)-u_n)$ montrer que si $\sum u_n^2$ converge alors $\prod(1+u_n)$ converge.

III. (1) Étudier la convergence des produits infinis :

a. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

b. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*} n^{\frac{a}{n}}$ avec $a>0$.

c. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)$

d. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{-x}{n}}$ avec $x>0$.

e. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1+(-1)^n\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$

(2) Montrer la convergence et calculer la somme des produits infinis suivants :

a. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ (on pourra faire apparaître un produit télescopique)

b. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1+\frac{1}{(2n+1)(n+2)}\right)$ (idem)

c. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}}\left(1+x^{2^n}\right)$ (on pourra multiplier par $(1-x)$ les produits partiels), avec $x\in]0,1[$

d. $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$ (on pourra s'inspirer des idées précédentes), avec $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$.

(3) En utilisant la formule de Stirling établir que $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}$.

IV. Dans cette partie on note $\mathcal{P}=\{n\in\mathbb{N}^*, n \text{ premier }\}=\{p_j, j\in\mathbb{N}\}$, où $p_0<p_1<\ldots<p_n<p_{n+1}<\ldots$.

(1) Démontrer que la série $\displaystyle\sum\frac{1}{p_n}$ converge si et seulement si le produit $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}$ converge.

(2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, établir que $\displaystyle\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_n^k}$.

(3) Soit $N\in\mathbb{N}$. En utilisant la question précédente, montrer que $\displaystyle\prod_{n=0}^{N}\frac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\geq\sum_{m=1}^{p_N}\frac{1}{m}$.

(4) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum\frac{1}{p_n}$.

V. On considère maintenant une suite de nombres réels $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, tous différents de -1 et on pose pour $n\in\mathbb{N}^*$ $\displaystyle P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ et $\displaystyle v_n=\frac{u_n}{P_n}$.

(1) Pour $n>1$ exprimer v_n en fonction de $\dfrac{1}{P_n}$ et $\dfrac{1}{P_{n-1}}$.

(2) On suppose dans cette question que $\sum u_n^2$ converge.

a. Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ converge.

b. La réciproque est-elle vérifiée ? Justifier votre réponse.

(3) Donner une suite $(u_n)_n$ telle que $\sum u_n$ converge mais $\sum v_n$ diverge.