Feuille d'exercices : Algèbre bilinéaire

Produit scalaire, familles orthogonales et orthonormées

Exercice 1 * Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et soit $(u_1,\dots,u_p)$ une famille de vecteurs unitaires telle que : $\forall x\in E,\ \| x \|^2=\sum\limits_{j=1}^{p}(u_j|x)^2$. Montrer que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est une base de E.

Exercice 2 * Soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E espace vectoriel euclidien. Établir les équivalences suivantes :

1. $\mathcal{B}$ est orthonormale.
2. $\forall x\in E,\ x=\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$.
3. $\forall x\in E,\ ||x||^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i|x)^2$.
4. $\forall (x,y)\in E\times E,\ (x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}(e_i|x)(e_i|y)$.

Exercice 3 (Mines) Pour tous $P(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k$ et $Q(X)=\sum\limits_{k=0}^{n}b_kX^k$, on pose $\langle P|Q\rangle=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_k$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Trouver une base orthonormale de $H=\{P\in\mathbb{R}_n[X],\ P(1)=0\}$ pour ce produit scalaire.

Exercice 4 (Mines) On note $E=\mathbb{R}_n[X]$ et on donne $n+1$ réels $a_0,\dots,a_n$.

1. Montrer que $(P,Q)=\sum\limits_{k=0}^{n}P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Montrer qu'il existe une unique base $B=(P_0,\dots,P_n)$ orthonormale telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, tous les P_i sont de degré échelonné et les coefficients des X^i sont strictement positifs.
3. Déterminer l'expression de $P_i^{(k)}(a_k)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
4. Que se passe-t-il si $a_0=\ldots=a_n$?

Exercice 5 (Mines) On munit $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on ait $P(0)=\langle P,A_n\rangle$.
2. Montrer que A_n possède n racines simples dans $]0,1[$.

Exercice 6 (Mines-Centrale)

1. Soit E un espace euclidien de dimension n et v un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n}<v(e_i)|e_i>$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ choisie.
   (b) Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}<v(e_i)|f_j>^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1,\dots,e_n)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ de E choisies.
   (c) Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r.
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $A=(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\sigma(A)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}{a_{i,j}}^2$.
   (a) Que vaut $\sigma(A)$ si $A\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$? Et si A est la matrice dans la base canonique d'un projecteur orthogonal ?
   (b) Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega\in\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sigma\left({}^t\,\Omega A\Omega\right)=\sigma(A)$.

Exercice 7 (Centrale) Soit $(E,(.|.)$ espace euclidien ; soit $u\in\mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Montrer que u est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 8 Soit $(E,(.|.))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1. Montrer qu'il existe dans E n vecteurs unitaires $(u_1,\dots,u_n)$ tels que :

$$\forall i\neq j\in\{1,\dots,n\},\qquad \| u_i-u_j \|=1.$$

2. Une telle famille $(u_1, \dots, u_n)$ est-elle une base de E ?

Exercice 9 (X-ENS SR) * Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une famille obtusangle d'un espace euclidien $(E, \langle \mid \rangle)$: pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i | x_j \rangle < 0$.

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
2. Montrer l'existence, dans tout espace euclidien de dimension n, d'un $(n+1)$-uplet vérifiant les hypothèses de la question précédente.
3. On suppose dans cette question que $\dim E = n+1$ et que la famille est libre. On considère $(e_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ la base ON obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrer que la matrice de passage des (x_j) aux (e_j) est à cœfficients positifs.
4. On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(x_0, \dots, x_n) = n$. Démontrer que toute famille $(x_j)_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{k\}}$ de cardinal $n-1$ est libre et que l'expression de x_k dans cette famille a des composantes strictement négatives.
5. On suppose E de dimension n, les x_i de norme 1 et les produits scalaires deux à deux constants. Montrer que cette constante est égale à $-1/n$ et que la somme des x_i est nulle.

Exercice 10 (Ulm) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $(e_1, ..., e_n)$ une base orthonormée et $(f_1, ..., f_n)$ une famille de vecteurs tels que $\|e_k - f_k\|_2 < \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(f_1, ..., f_n)$ est une base. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose l'inégalité large ?

Exercice 11 (X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i \right\| \leqslant \sqrt{n}.$$

Exercice 12 (X) * Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme. Montrer que N provient d'un produit scalaire.

Exercice 13 (X) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les applications f de E dans $\mathbb{R}$, continues telles que pour tout $(x,y) \in E^2$, si x et y sont orthogonaux alors $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 14 (Ulm) Soit E un espace euclidien et (u_i) une famille de vecteurs telle que our tout $i \neq j$, $(u_i | u_j) \leqslant 0$. Montrer que la famille est indépendante si et seulement si il existe une forme linéaire ϕ sur E telle que pour tout i, $\phi(u_i) > 0$.

Projecteurs orthogonaux et distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 15 (CCINP) Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E, D la droite engendrée par $u = \sum_{k=1}^{n} k e_k$.

1. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur D dans la base e.
2. Donner le polynôme caractéristique et le spectre de p.
3. Calculer la distance de $v = \sum_{k=1}^{n} e_k$ à D.

Exercice 16 (CCINP-Mines-Centrale) * Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\phi : \begin{cases} E^2 & \to \mathbb{R} \\ (A,B) & (A|B) = \operatorname{Tr}({}^t AB) \end{cases}$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j}) \in E$, $|tr(A)| \leqslant \sqrt{n} \left(\sum_{(i,j)} a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. A quelle condition a-t-on égalité ?
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Soit $A = (a_{i,j}) \in E$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques. Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n} \sum_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.
5. Calculer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.

7. Calculer la distance de la matrice ne comportant que des 1 à ce sous-espace vectoriel.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des matrices scalaires $G = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$; trouver $G^\perp$ et calculer $d(M, G)$.

Exercice 17 (CCINP-Mines-Saint Cyr) On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big)\ \mathrm{d}t$ est un produit scalaire.
2. Montrer que $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ f'' = f\}$ sont orthogonaux. Sont-ils supplémentaires ?
3. Déterminer le projeté orthogonal de $h \in E$ sur G.

Exercice 18 (X-Centrale-Mines) Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\sin(t) + b\cos(t) - t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 19 (Centrale) Soit $\phi : (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(0)\,Q(0) + \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire.
   On se place désormais dans l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \phi)$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.
3. On pose $F = \{Q \in \mathbb{R}[X],\ Q(0) = 0\}$. Montrer que l'inclusion précédente est stricte.

Exercice 20 (Paris) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1, m]\!]^2$, $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Montrer que

$$\forall x \in E, \qquad \sum_{i=1}^m \langle u_i, x\rangle\ \langle x, p(v_i)\rangle = \|p(x)\|^2.$$

Isométries vectorielles

Exercice 21 (CCINP-Mines-Centrale-X) * Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

(i) f préserve l'orthogonalité : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y) = 0$.
(ii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
(iii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \alpha g$.

Exercice 22 (SR) Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux produits scalaires sur E ; on note N_1 et N_2 les normes euclidiennes associées. On suppose :
$$\forall (x,y) \in V^2,\ \phi_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \phi_2(x,y) = 0.$$
   (a) Montrer : $\forall (x,y) \in V^2,\ N_1(x) = N_1(y) \Rightarrow\ N_2(x) = N_2(y)$.
   (b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $N_1 = c\,N_2$ et $\phi_1 = c^2\,\phi_2$.
2. On munit V d'un produit scalaire. Soit $u \in L(V)$ telle que pour tout $(x,y) \in V^2$, x et y sont orthogonaux si et seulement si $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux. Montrer que u est une similitude.

Exercice 23 (CCINP) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $< X, Y >= {}^tXY$ et, pour $V \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, unitaire, on pose $H_V = I_n - 2V\,{}^tV$.

1. Montrer que H_V est orthogonale et décrire géométriquement l'endomorphisme que cette matrice représente.
2. Soient deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$, distincts et de même norme ; montrer que $X + Y$ et $X - Y$ sont orthogonaux.
3. Montrer qu'il existe $V \in \mathbb{R}^n$ tel que $X = H_V Y$.

Exercice 24 (ENS-IMT)

1. Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et de déterminant 1.

Exercice 25 (Mines-X) *

1. Soient E un espace euclidien, (a_i) et (b_i) deux familles de n éléments de E. Montrer l'équivalence entre :
   (i) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ < a_i, a_j >=< b_i, b_j >$.
   (ii) Il existe une isométrie vectorielle φ telle que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi(a_i) = b_i$.

2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour tous i, j dans $\{1, \dots, k\}$, $\langle u_i, u_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle$. Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $v_i = Wu_i$.
3. Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que ${}^tAA = {}^tBB$ si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = PB$.

Exercice 26 (CCINP)

1. Dans l'espace euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$, soit r la rotation vectorielle d'angle θ autour de l'axe orienté dirigé par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$.
   Montrer que : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3, \qquad r(\overrightarrow{x}) = \cos(\theta).\overrightarrow{x} + \sin(\theta).(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}) + 2(\overrightarrow{u} \mid \overrightarrow{x})\sin^2(\frac{\theta}{2}).\overrightarrow{u}$.
2. Déterminer par plusieurs méthodes la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe dirigé par $\overrightarrow{a} = {}^t(1, -1, 0)$.

Exercice 27 (Mines) Soit u l'endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour que u soit une rotation, il faut et il suffit que (a, b, c) soient les racines d'une équation du troisième degré :

$$u^3 - u^2 + p = 0 \qquad (\text{avec } p \in [0, \frac{4}{27}]).$$

Dans le cas où cette condition est vérifiée, déterminer les éléments caractéristiques de la rotation.

Exercice 28 (CCINP) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :

1. $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 & -3 \\ -\sqrt{6} & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
2. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 29 (Mines) Soit $A = (a_{ij})$ orthogonale réelle de taille n. Montrer que $\left|\sum_{i,j} a_{ij}\right| \leqslant n$.

Exercice 30 (Mines) Soit E un espace euclidien. On considère σ une réflexion d'hyperplan H, et $u \in O(E)$.

1. On pose $f = u \circ \sigma \circ u^{-1}$. Étudier la nature de f.
2. Déterminer les éléments de $\mathcal{O}(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

Exercice 31 (Mines) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, on pose $I(f) = \operatorname{Im}(f - \operatorname{Id})$ et $K(f) = \ker(f - \operatorname{Id})$. Pour $x \in E \backslash \{0\}$, on note s_x la réflexion par rapport à $x^\perp$.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que E est somme directe orthogonale de $I(f)$ et de $K(f)$.
2. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Montrer que $I\left(s_{x_1} \circ \cdots \circ s_{x_p}\right) = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 32 (Ulm) $\mathsf{SO}_3(\mathsf{Q})$ est-il dense dans $\mathsf{SO}_3(\mathsf{R})$?

Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 33 (CCINP-Mines) Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. Soient $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto x + k\langle x, a\rangle a$.

Montrer que f est un endomorphismes symétrique. Pour quels k, f est-il inversible ? Orthogonal ? Trouver les valeurs propres de f et ses espaces propres.

Exercice 34 (CCINP) Soit E un espace euclidien et soient a et b deux vecteurs indépendants. On pose $u : x \in E \mapsto (a|x)b + (b|x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
2. Trouver le noyau de u.
3. Trouver le valeurs propres et les vecteurs propres de u.

Exercice 35 (Mines) Déterminer l'ensemble des couples (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tels qu'existe $M \in S_2(\mathbb{R})$ vérifiant $\operatorname{Tr}(M) = a$ et $\det(M) = b$.

Exercice 36 (CCINP) Soient $(u_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ des endomorphismes symétriques tels que $\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \operatorname{rg}(u_j) = \dim E \\ \forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \langle u_j(x)|x\rangle = \langle x|x\rangle \end{cases}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_j = \operatorname{Id}_E$.
2. Montrer que $\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{p} \operatorname{Im} u_j = E$.
3. Montrer que cette somme est orthogonale.
4. Reconaître les u_j.

Exercice 37 (CCINP-Mines) *

1. Montrer que si A est une matrice réelle, AA^T et A^TA sont diagonalisables.
2. (Mines) Montrer quenAA^T et A^TA ont le même polynôme caractéristique.
3. (CCINP) Soient $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que MN et NM ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre non nulle, ont même dimension (on n'utilisera pas le polynôme caractéristique). Montrer que AA^T et A^TA ont les mêmes valeurs propres aux mêmes ordres.
4. Montrer que AA^T et A^TA sont orthogonalement semblables (il existe U orthogonale telle que $AA^T = U\,A^TA\,U^T$).

Exercice 38 (Mines)

1. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice V orthogonalement semblable à U telle que ${}^tV\,V$ soit diagonale.
2. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E telle que $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ soit orthogonale.

Exercice 39 (Centrale)

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\operatorname{Sp}(M) \subset \{0\}$ si et seulement si M est nilpotente. Est-ce toujours vrai pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Soit V un sous-espace vectoriel regroupant des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\{0\}$. Montrer que $\dim(V) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   Cette majoration est-elle optimale ?

Exercice 40 (CCINP) * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1,\dots\lambda_n$ les valeurs propres de A (avec multiplicités). Montrer que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 41 (Mines) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse. Montrer que $\operatorname{Tr}(A^2) \geqslant n$ et qu'il y a égalité si et seulement si A est une symétrie orthogonale.

Exercice 42 (X-Mines-ENS) * Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, de coefficients a_{ij}.

1. Montrer que $\det(A) \geqslant 0$ et que pour tout i, $a_{i,i} \geqslant 0$.
2. Montrer que $\det A \geqslant 0$ et $\det A \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.
3. On suppose que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det M)^2 \leqslant \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} m_{i,j}^2)$. On suppose M inversible. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 43 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A s'écrit ST avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in S_n(\mathbb{R})$, A est diagonalisable.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement s'il existe $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que
   ${}^tA = SAS^{-1}$.

Exercice 44 (ENS-X) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. * Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$ et $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$. Montrer que $\operatorname{Tr}(AB) \leqslant a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$.

2. (ENS) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ (resp. $\mu_1 \leqslant \cdots \leqslant \mu_n$) les racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$ (resp ${}^tBB$) comptées avec multiplicités. Montrer $|\mathrm{Tr}(AB)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i$.

Exercice 45 (X-Centrale) * Soit E un espace vectoriel euclidien. On considère p et q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $(\ \mathrm{Im} p + \ker q)^{\perp} =\ \mathrm{Im} q \cap \ker p$ et que $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(q) + \mathrm{Im}(q) \cap \mathrm{Ker}(p)$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 46 (X-Centrale) *

1. Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q des projecteurs orthogonaux, $x \in E$ tel que $p(x) = -q(x)$. Montrer que $p(x) = q(x) = 0$.
2. Soient f et g deux endomorphismes symétriques positifs de E tels que $\det(f+g) = 0$. Montrer que $\ker f \cap \ker g \neq \{0\}$.

Exercice 47 (X) Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal si et seulement si p et q commutent.
2. Montrer que ces conditions sont satisfaites si et seulement si les valeurs propres de $p + q$ sont contenues dans $\{0\} \cup [1, +\infty[$.

Exercice 48 (Mines) Soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (\min\{i,j\}\, \alpha_i\alpha_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $\phi : (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2 \mapsto {}^t XAY$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit un produit scalaire.

Exercice 49 (X) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est définie positive lorsque ${}^tXAX > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.

1. * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Montrer que la sous-matrice $A_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ est définie positive et que son déterminant D_k est strictement positif.
2. * On suppose que $D_k > 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que A est définie positive.
3. Soit $t \in]0, 1[$. Montrer que $A(t) = \left(t^{|i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie positive.
4. Montrer que $B = \left(\dfrac{1}{1 + |i-j|}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est définie positive.

Exercice 50 (Ulm-Centrale) * Pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $B \leqslant A$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A \leqslant B$ si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXAX \leqslant {}^tXBX$, et que $\leqslant$, définie sur $S_n(\mathbb{R})$ par est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$..
2. Montrer qu'une partie de $S_n(\mathbb{R})$ est bornée (pour une norme quelconque), si et seulement si elle est majorée et minorée au sens de $\leqslant$.
3. Pour $A \in S_n(\mathbb{R})$, montrer que $X(A) = \{S \in S_n(\mathbb{R}),\ A \leqslant S\}$ et $Y(A) = \{S \in S_n(\mathbb{R}),\ S \leqslant A\}$ sont convexes et fermées.
4. Que dire de $Z(A, B) = \{S \in S_n(\mathbb{R}),\ A \leqslant S \leqslant B\}$?
5. Montrer qu'une suite croissante et majorée au sens de $\leqslant$, converge.
6. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^2$ tel que $A \leqslant B$. Montrer que $\det A \leqslant \det B$.

Exercice 51 (X) Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$, E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + a(f')^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $f \in E$ tel que $f(0) = v$.
3. Soit $v \in \mathbb{R}$. Déterminer $\inf \left\{ \displaystyle\int_0^{+\infty} (f^2 + a(f')^2)\ ;\ f \in E, f(0) = v \right\}$.
4. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose : $A \leqslant B \ \Leftrightarrow\ B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note d'autre part $\sqrt{A}$ l'unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
   Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A \leqslant B$. Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}$.

Exercice 52 (Mines) Soit $M = \left(\dfrac{1}{i + j + 1}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M est diagonalisable, puis que M appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ le spectre ordonné de M. Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1{}^t XX \leqslant {}^t XMX \leqslant \lambda_n{}^t XX$.

Exercice 53 (X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1(M) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(M)$ la suite ordonnée des valeurs propres de M. Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\lambda_1(A+B) \leqslant \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(B)$.

Exercice 54 (PLSR) * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n+1-i}.$$

Exercice 55 (Lyon) * Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de M (avec multiplicités) et $\lambda'_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda'_n$ celles de M', la matrice obtenue à partir de M en enlevant la première ligne et la première colonne. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \lambda'_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda'_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda'_{n-1} \leqslant \lambda_n$.

w

Exercice 56 (X) On appelle état de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de trace 1, à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.

1. Caractériser les états S tels que $S^2 = S$. On les appelle les états purs.
2. Montrer que l'ensemble des états est une partie convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que les points extrémaux de l'ensemble des états sont les états purs (un état est dit extrémal lorsqu'il ne peut s'exprimer comme barycentre à coefficients strictement positifs de deux états distincts).

Exercice 57 (Mines-Lyon) *

1. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) \subset [a_1 b_1, a_n b_n]$ où $a_1 = \min \mathrm{Sp}(A)$ et $a_n = \max \mathrm{Sp}(A)$ (et de même pour B).
3. Soient A, B, C dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que ABC est symétrique. Montrer que le spectre de ABC est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 58 (X) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda I_n - {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lambda I_n - A^tA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 59 (X) Soit $V \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m > n$ telle que ${}^tVV = I_n$. Montrer que $I_m - V^tV$ est symétrique positive.

Exercice 60 (CCINP-Mines) *

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det A)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(A)$. item Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, de déterminant égal à 1 ; montrer que $\mathrm{Tr}(AB) \geqslant n(\det A)^{1/n}$.
2. (Mines) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que $(\det AB)^{\frac{1}{n}} \leqslant \dfrac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB)$.

Exercice 61 (X-Ulm) * Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, α et β dans $\mathbb{R}^+$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

1. Montrer que si A est définie positive alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.
2. Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geqslant (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.
3. Montrer que $(\det(I_n + A))^{1/n} \geqslant 1 + (\det A)^{1/n}$.
4. Montrer que $(\det(A+B))^{1/n} \geqslant (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$.

Exercice 62 (Lyon)

1. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{Tr}(I_n - A^{-1}B) \leqslant \ln\left(\dfrac{\det(A)}{\det(B)}\right)$.
2. Soient $\lambda > 0$ et $(U_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit une suite de matrices : $B_m = \lambda I_n + \sum_{i=1}^{m} U_i U_i^\top$.

   Montrer que $B_m \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
3. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de B_m. Montrer que $\sum_{i=1}^{m} U_i^\top B_m^{-1} U_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{\lambda_i}{\lambda}\right)$.

Exercice 63 (Ulm) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout i, $a_{i,i} = 1$ et que, pour tous $i \neq j$, $|a_{i,j}| \leqslant 1/\sqrt{n}$. Montrer que le rang de A est supérieur ou égal à $n/4$. *Ind :* On pourra démontrer que pour une matrice symétrique non nulle $\mathrm{rg}(A) \geqslant \dfrac{\mathrm{Tr}(S)^2}{\mathrm{Tr}(S^2)}$.

Décompositions polaires et autres décompositions

Exercice 64 (X) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(T, O) \in T_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = TO$, où $T_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 65 (X) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique matrice dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, notée $|T|$, telle que $|T|^2 = {}^tTT$.
2. Montrer que $\ker T = \ker |T|$.
3. Montrer qu'il existe une unique U dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que U réalise une isométrie vectorielle de $\mathrm{Im}|T|$ dans $\mathrm{Im}T$, U est nulle sur $\ker T$ et $T = U|T|$.

Exercice 66 (SR) * Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Rappeler que AA^T est diagonalisable à valeurs propres positives. On note $S(A)$ la suite décroissante des racines carrées des valeurs propres non nulles de AA^T (avec multiplicité).
2. Comparer $S(A)$ et $S(A^T)$.
3. Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et V dans $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telles que $U^TAV = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, avec $S(A) = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.
4. On considère $A^* = VR^*U^T$, avec $R^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
   (a) Que dire si A est carrée inversible ?
   (b) Sinon que dire de AA^* ?
   (c) Et que dire de A^*A ?

Exercice 67 (U) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U^*U = I_n$ et $A = U^*BU$. Montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = O^TBO$.

Exercice 68 (L) Pour $M \in \mathcal{S}_n(R)$, on note $\lambda_1(M) \leqslant \dots \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(R)$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(R)$. Montrer que si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
2. Généraliser à $A_1, \dots A_d \in \mathcal{S}_n(R)$ telles que $\displaystyle\sum_{i=1}^{d} A_i \in \mathcal{S}_n^{--}(R)$.

Exercice 69 (ULSR)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. À quelle CNS sur a, a-t-on $M \in S_n^+(\mathbb{R})$?
2. Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$ tel que $1 + 2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$.

Autour des matrices de covariance

Exercice 70 (Ulm) Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire sur un certain espace probabilisé, de composantes notées $X_1, \dots, X_d$ ayant toutes un moment d'ordre 2. On note $\mathrm{Cov}(X) = \big(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant d.}$

1. Montrer que $\mathrm{Cov}(X)$ est symétrique à valeurs propres positives.
2. Réciproquement, montrer que toute matrice symétrique à valeurs propres positives est la matrice de covariance d'un certain vecteur aléatoire.
3. Montrer que si $\det \mathrm{Cov}(X) = 0$ alors il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $(X \in \mathcal{H})$ soit presque sûr.
4. On suppose que X possède un moment d'ordre 4. Soit $(X^{(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivante toute la loi de X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X^{(i)}$. Montrer que la suite de terme général $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X^{(i)} - M_n)(X^{(i)} - M_n)^T$ de matrices aléatoires converge en probabilité vers $\mathrm{Cov}(X)$ (c'est-à-dire que, pour une norme arbitraire N sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, pour tout $\epsilon > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}\big(N\big(Y_n - \mathrm{Cov}(X)\big) > \epsilon\big)$ converge vers 0).

Exercice 71 (X) Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel. On note M la matrice des covariances des X_i c'est-à-dire $(\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

2. Soient $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant de M et $(u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
   Montrer que $\mathbf{V}(\langle u_1, X\rangle) = \lambda_1$ est la borne supérieure sur les vecteurs v unitaires de $\mathbf{V}(\langle v, X\rangle)$.
3. Montrer que $\mathbf{V}(\langle u_k, X\rangle) = \lambda_k$ est la borne supérieure sur les v unitaires de $\mathbf{V}(\langle v, X\rangle)$ avec l'hypothèse que $\langle v, X\rangle$ est non corrélé avec $(\langle u_1, X\rangle, \ldots, \langle u_{k-1}, X\rangle)$.

Exercice 72 (ENS) Une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive lorsque $\forall Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^tYSY \geqslant 0$.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive si et seulement s'il existe, sur un certain espace probabilisé, une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles bornées telles que $s_{i,j} = \mathrm{E}(X_iX_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
2. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives. Montrer que $(a_{i,j}b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est positive.

Exercice 73 (Paris) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X^n_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires vérifiant $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{E}(e^{\lambda X^n_{i,j}}) \leqslant e^{\lambda^2}$. Soit $M^n = (M^n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice aléatoire symétrique telle que, si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $M^n_{i,j} = X^n_{i,j}$.

1. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$\mathbb{P}\left(\langle M^n v, v\rangle \geqslant \alpha\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n}\, e^{-n\alpha^2/8}$$
2. En déduire une majoration avec grande probabilité, lorsque n est grand, de la plus grande valeur propre de M^n.

Divers : endomorphismes antisymétriques...

Exercice 74 (Mines) Soient A antisymétrique et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{r\to+\infty} A^r = L$. Montrer que $L = 0$.

Exercice 75 (ENS-Mines) Soit A une matrice antisymétrique réelle. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures et que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 76 (X) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 77 (X) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ {}^tXAY = 0 \Rightarrow {}^tYAX = 0$. Montrer que A est symétrique ou antisymétrique.

Exercice 78 (CCINP) Soit u un endomorphisme orthogonal de E euclidien.

1. On pose $v = u - Id$; montrer que $\ker v = (\ \mathrm{Im} v)^{\perp}$.
2. Montrer que la suite de terme général $u_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k(x)$ converge vers la projection orthogonale de x sur $\ker v$.

Exercice 79 (Mines) * Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

1. Pour tout $z \in E$, montrer que $\|z\| = \sup\limits_{y\in S(0,1)} \langle z|y\rangle$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de norme subordonnée $\|\ u\ \|$. Montrer que $\|\ u\ \| = \sup\{\langle u(x)|y\rangle,\ (x,y) \in E^2,\ \|x\| = 1,\ \|y\| = 1\}$.
3. En déduire que $\|\ u\ \| = \|\ u^*\ \|$.
4. Montrer que, si $f(x) = x$, alors $f^*(x) = x$
5. Montrer que $E = \ker(f - \ \mathrm{Id}) \oplus \ \mathrm{Im}(f - \ \mathrm{Id})$.
6. Étudier la limite quand n tend vers l'infini de $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

Exercice 80 (X-Mines-SR) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{SO}_n^*(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\ -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $-1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
2. On définit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ -1 \notin \mathrm{Sp}(M)\}$. On considère $f : A \in E \mapsto (A + I_n)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $f(A) \in \mathrm{SO}_n^*(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $S \in \mathrm{SO}_n^*(\mathbb{R})$, $f(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $f(f(A)) = A$.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $M_x = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $f\left(M_{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.
6. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$, il $P \in O_{2n}(\mathbb{R})$ et $x_1, \ldots x_n$ tels que pour $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale par blocs constituée des blocs $M_{x_1}, \ldots M_{x_n}$.

Exercice 81 (X) * Soit $A \in\ \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs 2×2, où chaque bloc est antisymétrique inversible.

Exercice 82 (ULSR) On considère $\phi\colon (\mathbb{R}^4)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u,v) associe la matrice dont le cœfficient en (i,j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.

1. Que peut-on dire si $\phi(u,v) = \phi(u',v') \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque ?
3. Montrer que A s'écrit comme $\phi(u,v)$ avec (u,v) libre *ssi* $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Exercice 83 (ULSR) Sur $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, on appelle Pfaffien l'application $Pf : A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) \mapsto a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{2,3}a_{1,4}$.

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}), Pf(A)^2 = \det(A)$.
2. On admet que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ Pf(B^TAB) = \det(B)Pf(A)$.
3. Montrer que si $R \in SO_4(\mathbb{R})$ et $A = R^T - R$ alors :
$$A \in GL_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(R) \cap R = \varnothing \Leftrightarrow Pf(A) \neq 0.$$
4. On considère $R_1, R_2 \in SO_4(\mathbb{R})$ et on pose $A_i = R_i^T - R_i$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $Pf(A_1) = Pf(A_2)$. Montrer qu'il existe $P \in SO_4(\mathbb{R})$ tel que $R_1 = PR_2P^\top$.

Exercice 84 (L) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X,Y) \mapsto \langle X,Y \rangle = \mathrm{Tr}(X^TY)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$ la norme associée.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que
$$L\colon \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ M & \mapsto (X \mapsto MX) \end{cases}$$
est un morphisme d'algèbre injectif.
3. On note $|||\cdot|||_{\mathrm{Tr}}$ la norme triple associée à $\|\cdot\|_{\mathrm{Tr}}$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $|||L(M)|||_{\mathrm{Tr}} \leqslant |||M|||_2$ (norme subordonnée à la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$).

Exercice 85 *(ENS)* On note $A = \{u \in \mathcal{L}(E),\ uu^*u = u\}$.

1. Montrer les équivalences entre : $(u \in A)$ et (u^*u est un projecteur orthogonal).
2. Montrer que c'est également équivalent à $((\ker u)^\perp = \{x \in E,\ \|x\| = \|u(x)\|\}$.
3. Montrer que le groupe orthogonal est un ouvert et un fermé de A (on pourra d'abord vérifier qu'il est inclus dans A).