Programme de colles - Semaine 15 - du 10/2 au 14/2

Probabilités discrètes : exercices de révisions sur tout le chapitre. Des compléments classiques, notamment sur les marches aléatoires, des temps d'attente, les chaînes de Markov, des inégalités de concentration, les modes de convergence des variables aléatoires, ou la loi forte des grands nombres ont été vus mais doivent être redémontrés.

Espace euclidien : nous avons commencé le cours, mais nous ne corrigerons des exercices qu'à partir de lundi. Il est donc préférable de commencer à interroger les étudiants sur ce chapitre qu'à partir de mardi ou mercredi. Dans tous les cas, essayez donc de commencer par des exercices proches du cours ou sur le programme de MPSI.
Espace préhilbertien : Quelques rappels de MPSI. Définition d'un produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Définition de la norme associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Égalités de polarisation, du parallélogramme. Vecteurs orthogonaux. Famille orthogonale et propriétés. Théorème de Pythagore. Espaces vectoriels orthogonaux. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Premières propriétés.

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie : Dans un espace préhilbertien, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.

Particularité des espaces euclidiens : Existence de bases orthonormées. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien. Expression des coordonnées, produit scalaire, norme dans une base orthonormée. Dimension du sous-espace orthogonal d'un sous-espace vectoriel et conséquences.

Adjoint d'un endomorphisme : Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Notation u^*. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint. Matrice de l'adjoint en base orthonormée. Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*. Noyau et image de l'adjoint u^* en fonction de ceux de u.

Isométries vectorielles d'un espace euclidien : Isométrie vectorielle d'un espace euclidien. Définition par la conservation des normes. Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. Autre dénomination : automorphisme orthogonal. Caractérisation avec la conservation du produit scalaire. Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$. Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.

Matrices orthogonales : Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes. Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Isométries vectorielles et matrices orthogonales : Une matrice orthogonale est la matrice d'une isométrie vectorielle en base orthonormée. Groupe orthogonal $O(E)$. Groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$. Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$. Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte. Groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(E)$. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie. Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.