Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in\ \{0,1\}^n \right\}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_n = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j},\ (x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in\ \{0,1\}^n \right\} \text{ et } D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \pi_n(x) = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$$

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N},\ d_{n+1}(x) = 2^{n+1}(\pi_{n+1}(x) - \pi_n(x))$$

I. Fonction caractéristique

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$ pour tout $n \geq 1$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{2^k}$$

Pour X variable aléatoire réelle avec $X(\Omega)$ fini, on note

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi_X(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{i\,tX})$$

On définit également

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \operatorname{sinc}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul et t un réel.

(1) Montrer

$$\Phi_{X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$$

(2) En déduire

$$\sin\left(\frac{t}{2^n}\right)\Phi_{X_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}$$

(3) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(\Phi_{X_n})_{n\geq 1}$.

(4) Étudier la continuité de $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_{X_n}$.

(5) Montrer que X_n et $-X_n$ ont même loi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(6) En déduire la limite simple de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_n\ :\ \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \mathbb{E}(\cos(tX_n)) \end{cases}$$

(7) La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

II. Ecriture binaire

Soit n un entier naturel non nul. On pose

$$\Phi_n\ :\ \begin{cases} \{0,1\}^n \to [\![0, 2^n - 1]\!] \\ (x_j)_{j\in\ [\![1,n]\!]} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \end{cases}$$

(1) Montrer que Φ_n est bien définie en vérifiant que $\mathrm{Im}(\Phi_n) \subset [\![0, 2^n - 1]\!]$.

(2) Montrer que Φ_n est bijective.

(3) Établir la monotonie au sens de l'inclusion de la suite $(D_n)_{n\geq 1}$ puis vérifier $D \subset [0,1[$.

(4) Établir

$$\forall (x,n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N},\ \pi_n(x) \leq x < \pi_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

(5) Justifier

$$\forall x \in [0,1[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}$$

(6) Établir

$$\forall (x,j) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}^*,\ d_j(x) \in \{0,1\}$$

(7) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier $x \in D_n \iff 2^n x \in [\![0, 2^n - 1]\!]$.

(8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$\Psi_n\ :\ \begin{cases} \{0,1\}^n \to D_n \\ (x_j)_{j\in\ [\![1,n]\!]} \mapsto \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \end{cases}$$

est bijective.

(9) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{j\in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. Montrer

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \pi_k(x) = \sum_{j=1}^{\min(n,k)} \frac{x_j}{2^j}$$

III. Développement dyadique, loi de composition

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{U_k}{2^k}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x),\ G_n(x) = \mathbb{P}(Y_n < x)$$

(1) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left(Y_n \in [0,1[\right) = 1$.

(2) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_n,\ F_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$.

(3) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in D_n,\ G_n(x) = x$.

(4) Établir, pour tout entier naturel non nul n, que Y_n suit une loi uniforme sur D_n.

(5) Réciproquement, soit n un entier naturel non nul et soit X_n une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur D_n. Montrer qu'il existe des variables aléatoires $V_1, \dots, V_n$ mutuellement indépendantes, suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et telles que

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{2^k}$$

IV. Développement dyadique, étude asymptotique

On conserve les notations introduites dans la partie III.

(1) Soit x réel. Établir la monotonie des suites $(F_n(x))_{n\geq 1}$ et $(G_n(x))_{n\geq 1}$.

(2) En déduire la convergence simple des suites de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ et $(G_n)_{n\geq 1}$.

(3) Montrer que

$$\forall x \in D \cup \{1\},\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = x \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = x$$

(4) Généraliser les résultats obtenus à la question précédente pour tout $x \in [0,1]$.

(5) Montrer que pour tout intervalle non vide $I \subset [0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(Y_n \in I) = \ell(I) \quad \text{avec} \quad \ell(I) = \sup I - \inf I$$

(6) En déduire que, pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, la suite $(\mathbb{E}(f(Y_n)))_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.

(7) À l'aide du résultat précédent, proposer une autre démonstration du résultat obtenu à la question 6.

(8) *Une application.* Justifier l'existence de $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\ \mathrm{d}t$ puis déterminer sa valeur.

`On pourra considérer` $\int_0^1 \mathbb{E}(t^{Y_n})\ \mathrm{d}t$.

V. Dénombrabilité

(1) L'ensemble D est-il dénombrable ?

(2) On suppose qu'il existe $f\ :\ \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bijective. En considérant $A = \{x \in \mathbb{N} /\ x \notin f(x)\}$, établir une contradiction.

(3) Montrer que l'application $\Phi\ :\ \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} \\ A \mapsto \mathbf{1}_A \end{cases}$ est bijective.

(4) Montrer que l'application

$$\Psi\ :\ \begin{cases} \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1] \\ (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} \end{cases}$$

est bien définie et surjective. Est-elle injective ?

On note $D^* = D \setminus \{0\}$. On pose pour tout $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$,

$$\Lambda((x_n)) = \begin{cases} \Psi((x_n)) & \text{si } \Psi((x_n)) \in [0,1[\setminus D^* \\ \dfrac{\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D \cup \{1\} \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 1 \\ \dfrac{1+\Psi((x_n))}{2} & \text{si } \Psi((x_n)) \in D^* \text{ et } (x_n) \text{ stationnaire à } 0 \end{cases}$$

(5) Montrer que Λ réalise une bijection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1[$.

(6) Conclure que $[0,1[$ n'est pas dénombrable.