Le but de ce problème est l'étude des valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$ et la preuve du théorème d'Ostrowski.

I. Introduction des valeurs absolues

Définition 1 *Une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ est une application V de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :*

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q},\ V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ V(xy) = V(x)V(y) \\ \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ V(x+y) \leq V(x) + V(y) \end{cases}.$$

Si de plus la valeur absolue V vérifie : $\forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ V(x+y) \leq \max(V(x), V(y))$, on dit qu'elle est *ultramétrique.*
On dira qu'une valeur absolue V est *archimédienne* si :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{Q}^*)^2,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ V(nx) > V(y).$$

(1) Soit V une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$.
- a. Calculer $V(1)$ et $V(-1)$.
- b. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, calculer $V(-x)$ (en fonction de $V(x)$).
- c. Pour tout $x \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ calculer $V(x^n)$ (en fonction de $V(x)$).
- d. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $V(m) \leq |m|$.

(2) *Exemple 1 : valeur absolue usuelle*

Expliquer que la valeur absolue usuelle $|.| : \begin{cases} \mathbb{Q} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$ est une valeur absolue.
Est-elle ultramétrique ? Est-elle archimédienne ?

(3) *Exemple 2 : valeur absolue triviale*

Montrer que la valeur absolue triviale $V_0 : \begin{cases} \mathbb{Q} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \end{cases}$ est une valeur absolue.
Est-elle ultramétrique ? Est-elle archimédienne ?

(4) *Variations autour de la valeur absolue usuelle*

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On définit $V_r : \begin{cases} \mathbb{Q} & \to \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto |x|^r \end{cases}$ (ainsi $V_1 = |.|$). Montrer que V_r est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si $r \in]0,1]$.

(5) *Exemple 3 : Valeurs absolues p-adiques*

Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier fixé.
- a. Soit $x \in \mathbb{Q}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(n,a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que
$$\begin{cases} x = p^n \dfrac{a}{b} \\ p \wedge a = p \wedge b = a \wedge b = 1 \end{cases}$$
On notera $v_p(x)$ cet unique entier n (il sera appelé valuation de x).
On peut ainsi définir la *valeur absolue p-adique* :
Définition 2
$$|x|_p = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ x = 0 \\ p^{-n} \ \textit{avec}\ n = v_p(x) \ \textit{sinon} \end{cases}.$$
- b. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{Q}^*)^2$, $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$.
- c. Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{Q}^*)^2$, $v_p(x+y) \geq \min(v_p(x), v_p(y))$.
- d. En déduire que $|.|_p$ est une valeur absolue ultramétrique.
- e. Montrer que $\mathbb{Z}$ est bornée pour cette valeur absolue p-adique et que celle-ci est non archimédienne.

II. Distance associée à une valeur absolue

Soit V une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. On lui associe alors une application :

$$d = d_V : \begin{cases} \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} & \to \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto d(x,y) = V(x-y) \end{cases}.$$

(1)
- a. Montrer que si V est une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ alors $d = d_V$ est une distance c'est-à-dire qu'elle vérifie :
$$\begin{cases} \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ d(x,y) \geq 0 \\ \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \textit{(séparation des points)} \\ \forall (x,y) \in \mathbb{Q}^2,\ d(x,y) = d(y,x) \ \textit{(symétrie)} \\ \forall (x,y,z) \in \mathbb{Q}^3,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \textit{(inégalité triangulaire).} \end{cases}$$
- b. Soit d une distance sur $\mathbb{Q}$ (ne provenant pas nécessairement d'une valeur absolue).
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{Q}$ pour la distance d si
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_0,\ \forall n \geq N_0,\ d(u_n, l) \leq \epsilon.$$

Par ailleurs, on peut définir pour tout $y \in \mathbb{Q}$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$, la boule de centre y et de rayon r : $B_d(y,r) = \{x \in \mathbb{Q},\ d(y,x) < r\}$.
Expliquer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{Q}$ pour la distance d si et seulement si

$$\forall r > 0, \exists N_0, \forall n \geq N_0,\ u_n \in B_d(l,r).$$

(2) *Distances équivalentes :*

Soient d_1 et d_2 deux distances sur $\mathbb{Q}$.

a. Montrer l'équivalence entre :
— Pour tout $y \in \mathbb{Q}$, pour tout $r > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que $B_{d_1}(y,\rho) \subset B_{d_2}(y,r)$.
— Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{Q}$ pour la distance d_1 alors elle converge vers l pour la distance d_2.

b. En déduire l'équivalence entre :
— Pour tout $y \in \mathbb{Q}$, pour tout $r > 0$, il existe $\rho > 0$ et $\rho' > 0$ tels que $B_{d_1}(y,\rho) \subset B_{d_2}(y,r)$ et $B_{d_2}(y,\rho') \subset B_{d_1}(y,r)$.
— Les distances d_1 et d_2 ont les mêmes suites convergentes.
On dit dans ce cas que les distances d_1 et d_2 sont équivalentes.

Définition 3 *On dit que deux valeurs absolues V_1 et V_2 sont topologiquement équivalentes si les distances associées d_{V_1} et d_{V_2} sont équivalentes (au sens ci-dessus).*

c. Montrer que pour tout $r \in]0,1]$, V_r est éduivalente à la valeur absolue usuelle $|.| = V_1$.

d. Plus généralement, on souhaite montrer que deux valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$, V_1 et V_2 sont équivalentes si et seulement si il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $V_2(x) = (V_1(x))^a$.
— Montrer que si V_1 et V_2 sont équivalentes alors :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \begin{cases} V_1(x) < 1 \Leftrightarrow V_2(x) < 1 \\ V_1(x) > 1 \Leftrightarrow V_2(x) > 1 \\ V_1(x) = 1 \Leftrightarrow V_2(x) = 1 \end{cases}.$$

— En déduire le résultat voulu.

e. En déduire que deux valeurs absolues p-adiques $|.|_p$ et $|.|_q$ sont équivalentes si et seulement si $p = q$.

On souhaite maintenant montrer le théorème d'Ostrowski :

Théorème 1 *Toute valeur absolue sur $\mathbb{Q}$ non triviale (c'est-à-dire différente de V_0 définie au I3) est topologiquement équivalente :*
— soit à la valeur absolue usuelle $|.|$
— soit à une valeur absolue p-adique.

III. Classification des valeurs absolues sur $\mathbb{Q}$

(1) *Un petit aparté sur la numération en base b*

Soit b un entier naturel, $b \geq 2$.

a. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $N \in \mathbb{N}$ et une unique famille $(x_j)_{j\in[\![0,N]\!]} \in \mathbb{N}^{N+1}$ tel que

$$\begin{cases} a = \sum_{j=0}^{N} x_j b^j \\ \forall j \in [\![0,N]\!],\ x_j \in [\![0,b-1]\!] \\ x_N \neq 0 \end{cases}$$

Cette écriture est appelée décomposition en base b de a.

(2) Soit $a \in \mathbb{N}^*$, $a \geq 2$ fixé. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on note N_q le plus grand exposant dans la décomposition en base b de l'entier a^q (voir ci-dessus) :

$$a^q = \sum_{j=0}^{N_q} x_{q,j} b^j \quad \text{avec } x_{q,N_q} \neq 0. \tag{1}$$

Montrer que $\lim\limits_{q\to\infty} \dfrac{N_q}{q} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

(3) *Applications aux valeurs absolues*

Soit V une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$. Soient a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Pour tout $q \geq 1$, on décompose a^q dans la base b avec les notations de (1).

a. On suppose dans un premier temps que $V(b) > 1$. Montrer que $V(a^q) \leq (N_q+1)bV(b)^{N_q}$.

b. En déduire que si $V(b) > 1$ alors $(V(a))^{\frac{1}{\ln a}} \leq (V(b))^{\frac{1}{\ln b}}$.

c. On suppose maintenant que $V(b) \leq 1$. Montrer de même que dans ce cas $V(a^q) \leq (N_q+1)b$.

d. En déduire que si $V(b) \leq 1$ alors $V(a) \leq 1$.

(4) *Une première classification*

Montrer que toute valeur absolue V sur $\mathbb{Q}$ appartient à l'une des trois catégories caractérisées respectivement par l'une des propriétés suivantes :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V(n) = 1$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V(n) \leq 1$ et l'inégalité est stricte pour au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $V(n) > 1$.

(5) Montrer que si V est dans la catégorie (i) alors nécessairement V est la valeur absolue triviale V_0.

(6) *Catégorie (iii)*

Soit V une valeur absolue dans la catégorie (iii).

a. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V(n) = n^r$.

b. En déduire $V(x)$, pour tout $x \in \mathbb{Q}$.

c. En déduire qu'il existe $r \in]0, 1]$ tel que $V = V_r$.

(7) *Catégorie (ii)*

Soit V une valeur absolue dans la catégorie (ii).

a. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{Q}^*)^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V((x+y)^n) \leq (n+1)(\max(V(x), V(y)))^n$. *On pourra utiliser le binôme de Newton.*

b. En déduire que V est ultra-métrique. *On pourra faire tendre n vers l'infini.*

c. Soit $G = \{n \in \mathbb{Z},\ V(n) < 1)\}$. Montrons que G est un sous-groupe de $(Z, +)$. Et en déduire qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $G = p\mathbb{Z}$.

d. Expliquer que nécessairement p est premier.

e. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $V(x) = (V(p))^{v_p(x)}$, où v_p est la valuation définie question I(5)a.

f. En déduire toutes les valeurs absolues de la catégorie (ii).

(8) Conclure la preuve du théorème d'Ostrowski.