Le but de ce problème est d'étudier certains aspects de la diagonalisabilité des matrices symétriques à coefficients rationnels. Ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, mais il se trouve que leurs valeurs propres ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur réelle. Le principal objectif de ce problème est de caractériser les nombres réels qui apparaissent comme valeurs propres de matrices symétriques à coefficients rationnels.

Notations : Dans tout le problème, si n et m sont des entiers naturels non nuls et K est un corps,

- on identifie l'espace vectoriel K^n à l'espace vectoriel des vecteurs colonnes $M_{n,1}(K)$;
- on note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques carrées de taille n à coefficients dans K ;
- si $A \in M_{m,n}(K)$, on note A^T la matrice transposée de A et, si $m = n$,

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

son polynôme caractéristique, qui est donc un polynôme unitaire ;

- si $q_1, \dots, q_n$ sont des éléments de K , on note $\text{Diag}(q_1, \dots, q_n)$ la matrice diagonale de taille n de coefficients diagonaux $q_1, \dots, q_n$.

I. Première partie :

- (1) Exhiber une matrice $M \in S_2(\mathbb{Q})$ dont $\sqrt{2}$ est valeur propre.
- (2) Le but de cette question est de montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas valeur propre d'une matrice de $S_2(\mathbb{Q})$. On suppose qu'il existe $M \in S_2(\mathbb{Q})$ telle que $\sqrt{3}$ est valeur propre de M .
 - a. En utilisant l'irrationalité de $\sqrt{3}$, montrer que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 3$.
 - b. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3.
 - c. Montrer qu'il n'existe pas de triplet d'entiers (x, y, z) premiers entre eux dans leur ensemble tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$.
 - d. Conclure.
- (3) a. On se donne $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $A \in S_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^2 = qI_n$. Construire une matrice $B \in S_{2n}(\mathbb{Q})$ commutant à la matrice $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ et telle que $B^2 = (q+1)I_{2n}$.
 - b. Montrer que pour tout $d \geq 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices $M_1, \dots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_k^2 = kI_n$ pour tout entier $1 \leq k \leq d$.

c. Soit $d \geq 1$ un entier. En déduire que si $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des matrices $M_1, \dots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_i^2 = q_i I_n$ pour tout $1 \leq i \leq d$.

- (4) Le but de cette question est de montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde, supposant l'existence d'une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ (pour un certain n) dont $\sqrt[3]{2}$ est valeur propre.
 - a. Montrer que $X^3 - 2$ divise le polynôme caractéristique de M . (On pourra commencer par prouver que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$).
 - b. Conclure.
- (5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, construire une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ dont $\cos(\frac{2\pi}{n})$ est valeur propre. (On pourra commencer par construire une matrice orthogonale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui admet $e^{2i\pi/n}$ pour valeur propre).

II. Deuxième partie :

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré $d \geq 1$ à coefficients complexes que l'on écrit sous la forme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_{d-1}X^{d-1} + X^d$$

On suppose $a_0 \neq 0$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ les racines de $P(X)$ (avec multiplicité). Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$N_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \dots + \lambda_d^n$$

- (6) Soit $Q(X)$ le polynôme réciproque de $P(X)$ défini par $Q(X) = X^d P(\frac{1}{X})$. Montrer que

$$\begin{aligned} Q(X) &= 1 + a_{d-1}X + \dots + a_1X^{d-1} + a_0X^d \\ &= (1 - \lambda_1X)(1 - \lambda_2X) \dots (1 - \lambda_dX) \end{aligned}$$

- (7) On définit la fonction $f : \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \cap \{\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_d}\}) \rightarrow \mathbb{C}$ par $f(x) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $] -r, r[$, et que le développement en série entière de f en 0 s'écrit

$$\forall x \in] -r, r[, f(x) = - \sum_{n=0}^{\infty} N_{n+1} x^n$$

- (8) a. Montrer que si $a_0, \dots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$, alors $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$.

- b. Réciproquement, montrer que si $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geq 1$, alors $a_0, \dots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.
- c. En déduire que si $\mu_1, \dots, \mu_d$ sont des nombres complexes et si

$$P(X) = \prod_{i=1}^d (X - \mu_i), \text{ alors } P(X) \in \mathbb{Q}[X] \text{ si et seulement si}$$

$$\forall n \geq 1, \sum_{i=1}^d \mu_i^n \in \mathbb{Q}$$

- (9) Soient $n, m \geq 1$ deux entiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ des nombres complexes. On définit

$$A(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$$

$$B(X) = (X - \beta_1)(X - \beta_2) \dots (X - \beta_m)$$

Montrer que si $A(X)$ et $B(X)$ sont à coefficients rationnels, alors les polynômes

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (X - \alpha_i \beta_j) \text{ et } \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (X - \alpha_i - \beta_j)$$

sont aussi à coefficients rationnels.

III. Troisième partie :

On dit qu'un nombre complexe z est *totalelement réel* (resp. *totalelement positif*) s'il existe un polynôme à coefficients rationnels tel que

- (i) z est une racine de P , et
(ii) toutes les racines de P sont dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}^+$).

- (10) Soit M une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Montrer que les valeurs propres de M sont totalelement réelles.
- (11) a. Montrer que l'ensemble des nombres totalelement réels est un sous-corps de $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le résultat de la question 9).
b. Montrer que l'ensemble des nombres totalelement positifs est inclus dans $\mathbb{R}^+$, est stable par addition, multiplication, et que l'inverse d'un nombre totalelement positif non nul est totalelement positif.
- (12) Soit x un nombre complexe. Montrer que x est totalelement réel si et seulement si x^2 est totalelement positif.

IV. Quatrième partie :

Le but de cette partie est de montrer que, réciproquement, tout nombre totalelement réel est valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des nombres totalelement réels et on **admet** qu'il existe une fonction $t : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- (i) pour $x, y \in \mathcal{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, on a $t(\lambda x + \mu y) = \lambda t(x) + \mu t(y)$
(ii) pour x totalelement positif, on a $t(x) \geq 0$ et l'égalité est stricte si $x \neq 0$.

On considère un nombre z totalelement réel non nul. Par définition, il existe un polynôme unitaire $Z(X) \in \mathbb{Q}[X]$ qui annule z . On écrit Z sous la forme

$$Z(X) = X^d - (a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0)$$

avec $d \in \mathbb{N}^*$ et $a_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. On suppose que $Z(X)$ est choisi de façon à ce que d soit minimal parmi les degrés des polynômes unitaires $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(z) = 0$.

On considère la matrice S de taille $d \times d$ dont le coefficient (i, j) , $1 \leq i, j \leq d$ vaut $t(z^{i+j})$.

Pour $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on pose $B(X, Y) = X^T S Y$.

- (13) a. Montrer que $B(X, X) > 0$ pour $X \in \mathbb{Q}^d$, $X \neq 0$.
b. En déduire que la matrice S est inversible.
- (14) Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.
- (15) a. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ avec $e_i \in \mathbb{Q}^d$ pour tout i et $B(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.
b. En déduire qu'il existe $P \in GL_d(\mathbb{Q})$ et $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, tels que

$$S = P^T \cdot \text{Diag}(q_1, \dots, q_d) \cdot P$$

On pose

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{d-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}$$

- (16) Calculer le polynôme caractéristique de M .
(17) a. Vérifier que la matrice SM est symétrique.

- b. En déduire que la matrice $RM R^{-1}$ est symétrique où $R = \text{Diag}(\sqrt{q_1}, \dots, \sqrt{q_d}) \cdot P$.
- (18) Construire une matrice symétrique à coefficients rationnels dont z est valeur propre.