Notations et définitions : Soit E un espace vectoriel euclidien. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. Si H est une partie de E , on appelle enveloppe convexe de H , notée $\text{conv}(H)$, la plus petite partie convexe de E contenant H .

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note tA la transposée de A et $\text{Tr}(A)$ la trace de A . On dit qu'une matrice symétrique réelle est positive si ses valeurs propres sont positives ou nulles.

On pourra identifier $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on suppose muni du produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique est orthonormée. On note $\|\cdot\|_2$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|A\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n, \|X\|=1} \|AX\|.$$

Les parties A, B, C et D sont indépendantes.

A. Produit scalaire de matrices

- (1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute base orthonormée $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$, on a la formule $\text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n \langle Ae_j, e_j \rangle$.

On rappelle que l'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ noté $(\cdot | \cdot)$.

On note $\|\cdot\|_1$ la norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à ce produit scalaire. L'attention du candidat est attirée sur le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est désormais muni de deux normes différentes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$.

- (2) Si A et B sont symétriques réelles positives, montrer que $(A|B) \geq 0$. On pourra utiliser une base orthonormée de vecteurs propres de B .

B. Décomposition polaire

Soit f un endomorphisme de E . On note A la matrice de f dans une base orthonormée e de E . Et on note f^* l'endomorphisme adjoint de f .

- (1) Montrer que tAA est une matrice symétrique réelle positive. Exprimer $\|A\|_2$ en fonction des valeurs propres de tAA .
- (2) Montrer qu'il existe une matrice réelle symétrique positive B telle que ${}^tAA = B^2$.

On note h l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base e est B .

- (3) Montrer que la restriction de h à $\text{Im}(h)$ induit un automorphisme de $\text{Im}(h)$. On notera cet automorphisme $\tilde{h}$.
- (4) Montrer que pour tout $x \in E$, $\|h(x)\| = \|f(x)\|$. En déduire que $\ker(h)$ et $(\text{Im}(f))^\perp$ ont même dimension et qu'il existe un isomorphisme v de $\ker(h)$ sur $(\text{Im}(f))^\perp$ qui conserve la norme.
- (5) À l'aide de $\tilde{h}$ et v , construire un automorphisme orthogonal u de E tel que $f = u \circ h$.
- (6) En déduire que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $A = US$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique positive. On admet que si A est inversible, cette écriture est unique.

C. Projeté sur un convexe compact

Soit H une partie de E , convexe et compacte, et soit $x \in E$. On note

$$d(x, H) = \inf_{h \in H} \|x - h\|.$$

- (1) Montrer qu'il existe un unique $h_0 \in H$ tel que $d(x, H) = \|x - h_0\|$. On pourra utiliser pour h_0, h_1 dans H la fonction définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par la formule $q(t) = \|x - th_0 - (1-t)h_1\|^2$.
- (2) Montrer que h_0 est caractérisé par la condition : pour tout $h \in H$, $\langle x - h_0, h - h_0 \rangle \leq 0$. On pourra utiliser la même fonction $q(t)$ qu'à la question précédente.
- Le vecteur h_0 s'appelle *projeté* de X sur H .

D. Théorème de Carathéodory et compacité

Dans cette partie, on suppose que E est de dimension n . On dit que $x \in E$ est une *combinaison convexe* des p éléments $x_1, \dots, x_p \in E$ s'il existe des réels positifs ou nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ tels que

$$x = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1.$$

- (1) Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ d'une partie H de E est constituée des combinaisons convexes d'éléments de H . On souhaite montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .

Soit $x = \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j$ une combinaison convexe de $x_1, \dots, x_p \in H$, avec $p \geq n + 2$.

(2) Montrer qu'il existe p réels non tous nuls $(\mu_i)_{1 \leq i \leq p}$ tels que

$$\sum_{j=1}^p \mu_j x_j = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^p \mu_j = 0.$$

On pourra considérer la famille $(x_j - x_1)_{2 \leq j \leq p}$.

(3) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p - 1$ éléments de H et conclure que $\text{conv}(H)$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n + 1$ éléments de H .

On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta \mu_i \geq 0$, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, pour un réel θ bien choisi.

(4) Si H est une partie compacte de E , montrer que $\text{conv}(H)$ est compacte. On pourra introduire l'ensemble compact de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par

$$\Lambda = \left\{ (t_i)_{1 \leq i \leq n+1} \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}.$$

E. Enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$

(1) Montrer que l'enveloppe convexe $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est compacte.

On note $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

(2) Montrer que $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ est contenue dans $\mathcal{B}$.

On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{B}$ telle que M n'appartienne pas à $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$. On note N le projeté de M sur $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$ défini à la partie C pour la norme $\|\cdot\|_1$, et on pose $A = {}^t(M - N)$. On écrit enfin $A = US$, avec $U \in O_n(\mathbb{R})$ et S symétrique réelle positive (voir question B7).

(3) Montrer que pour tout $V \in \text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$, $\text{Tr}(AV) \leq \text{Tr}(AN) < \text{Tr}(AM)$. En déduire que $\text{Tr}(S) < \text{Tr}(USM)$.

(4) Montrer que $\text{Tr}(USM) \leq \text{Tr}(S)$. On pourra appliquer le résultat de la question A1.

(5) Conclure : déterminer $\text{conv}(O_n(\mathbb{R}))$.

F. Points extrémaux

Un élément $A \in \mathcal{B}$ est dit extrémal dans $\mathcal{B}$ si l'écriture $A = \frac{1}{2}(B + C)$, avec B, C appartenant à $\mathcal{B}$ entraîne $A = B = C$. Dans cette partie, on cherche à déterminer l'ensemble des points extrémaux de $\mathcal{B}$.

(1) On suppose que $U \in O_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $U = \frac{1}{2}(V + W)$, avec V, W appartenant à $\mathcal{B}$. Montrer que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, les vecteurs VX et WX sont liés. En déduire que U est extrémal dans $\mathcal{B}$.
Soit A appartenant à $\mathcal{B}$ mais n'appartenant pas à $O_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrer que l'on peut écrire A sous la forme $A = PDQ$, où P et Q sont deux matrices orthogonales et où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux $d_1, d_2, \dots, d_n$ sont positifs ou nuls.

(3) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_i \leq 1$ et qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $d_j < 1$.

(4) En déduire qu'il existe deux matrices A_α et $A_{-\alpha}$ appartenant à $\mathcal{B}$ telles que $A = \frac{1}{2}(A_\alpha + A_{-\alpha})$. Conclure.