Notations et définitions.

Pour n et p deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à p lignes et n colonnes à coefficients réels. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.
On rappelle que deux matrices A et B appartenant à $\mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$ sont équivalentes si et seulement s'il existe une matrice P carrée inversible d'ordre p et une matrice Q carrée inversible d'ordre n telles que $B = PAQ$.
Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, MA \in J.$$

Un sous-groupe J de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +)$ est appelé un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall M \in J, AM \in J.$$

Si J est à la fois un idéal à gauche et un idéal à droite, on dit que J est un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On désigne par I_r la matrice identité d'ordre r.

I. Résultats préliminaires

Soit A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose A de rang r.

(1) Soit u l'endomorphisme de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a. Justifier l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$, $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$, telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ soit une base du noyau de u.

b. Montrer que $(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

c. En déduire que A est équivalente à la matrice $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où I_r désigne la matrice identité d'ordre r et 0 une matrice nulle de taille convenable.

(2) En déduire que A est équivalente à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang r.

II. Une première application de la relation d'équivalence :

On considère une application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, différente des constantes 0 et 1, telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2, f(AB) = f(A)f(B).$$

(1) Montrer que pour toute matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(A)$ est non nul.

(2) A est une matrice de rang r, strictement inférieur à n. Montrer que $f(A) = 0$.
On pourra utiliser $r+1$ matrices, $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$, toutes équivalentes à A et telles que le produit $A_1 A_2 \ldots A_{r+1}$ soit nul.

(3) En déduire que M est inversible si et seulement si $f(M) \neq 0$.

(4) Donner un exemple d'une telle application.

(5) On souhaite montrer qu'il existe une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour toute matrice M, $f(M) = g(\det(M))$.

a. Montrer que si M est une matrice de transvection $f(M) = 1$.

b. En déduire que pour toute matrice de déterminant 1, $f(M) = 1$.

c. Conclure.

III. Idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit J un idéal bilatère de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(1) Montrer que si J contient une matrice inversible alors $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) On suppose que J n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de rang r (non nul) appartenant à J.

a. Montrer que J contient toutes les matrices de rang r.

b. En déduire que J contient une matrice inversible.

(3) Quelle conclusion peut-on en tirer pour les idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

IV. Idéaux à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(1) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par J_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$J_E = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Im}(A) \subset E\}.$$

Montrer que J_E est un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) a. On désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, v une application linéaire de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\mathrm{Im}(v)$ est contenu dans $\mathrm{Im}(u)$.
Montrer qu'il existe un application linéaire w de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que : $v = u \circ w$.

b. Soit A un élément de $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{(n,q)}(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Im}(B)$ est contenue dans $\mathrm{Im}(A)$. Expliquer qu'il existe une matrice C appartenant à $\mathcal{M}_{(p,q)}(\mathbb{R})$ telle que $B = AC$.

(3) Soient A, B et C trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$ contient $\mathrm{Im}(C)$.

a. On désigne par $D = (A, B)$ la matrice de $\mathcal{M}_{(n,2n)}(\mathbb{R})$ obtenue en juxtaposant les matrices A et B, c'est-à-dire que les n premières colonnes de D sont celles de A et les n dernières celles de B.

Montrer que $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

b. En déduire l'existence d'une matrice W appartenant à $\mathcal{M}_{(2n,n)}(\mathbb{R})$ telle que : $C = DW$.

c. En déduire l'existence de deux matrices U et V appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $C = AU + BV$.

(4) Soit J un idéal à droite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer qu'il existe un entier naturel r tel que :

$$\forall M \in J, \mathrm{rg}(M) \leq r \text{ et } \exists M_0 \in J,\ \mathrm{rg}(M_0) = r.$$

On se fixe un tel r et un tel M_0.

b. Soit M un élément quelconque de J. On suppose que $\mathrm{Im}(M)$ n'est pas contenue dans $\mathrm{Im}(M_0)$.

En utilisant le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathrm{Im}(M) + \mathrm{Im}(M_0)$, montrer l'existence d'un élément de J de rang strictement supérieur à r.

c. Déduire des questions précédentes que J est contenu dans $J_{\mathrm{Im}(M_0)}$.

(5) Montrer que $J = J_{\mathrm{Im} M_0}$.

V. **Idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**

(1) Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{(n,1)}(\mathbb{R})$. On désigne par K_E le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$K_E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid E \subset \ker(M)\}.$$

Montrer que K_E est un idéal à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) a. On désigne par u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, v un application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^q$. On suppose que $\ker(v)$ contient $\ker(u)$.

Montrer qu'il existe un application linéaire w de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ tel que : $v = w \circ u$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_{(p,n)}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{(q,n)}(\mathbb{R})$ telles que $\ker(B)$ contient $\ker(A)$. Déduire de la question précédente qu'il existe $C \in \mathcal{M}_{(q,p)}(\mathbb{R})$ telle que $B = CA$.

(3) Soient A, B et C trois matrices carrées d'ordre n telles que $\ker(C)$ contient $\ker(A) \cap \ker(B)$.

Montrer qu'il existe deux matrices carrées d'ordre n, U et V, telles que $C = UA + VB$.

(4) Déterminer les idéaux à gauche de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.