MP*2 LLG
2025/2026

Séries numériques et familles sommables

Nature et somme d'une série :

Exercice 1 Étudier la nature de la série de terme général :

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $\frac{n^n}{(2n)!}$
3. (CCP) $\frac{n^\alpha(\ln n)^n}{n!}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
4. (ENSEA) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}$
5. $\tan\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n^\alpha+\sqrt{n}}{n^\alpha-\sqrt{n}}\right)$
6. (CCP) $(-1)^n\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
7. (CCP-Mines) $\ln\left(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ $(\alpha > 0)$
8. (IMT) $\sin\left(\frac{\pi}{n}(n^2+an+b)\right)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
9. (IMT) $\frac{1}{\sum_{k=2}^n \ln k}$
10. (Mines) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^\alpha}$, $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
11. (Mines) $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$
12. (Mines) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$
13. (Mines) $\frac{(-1)^n\ \mathrm{e}^{-\lambda \ln n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
14. (Mines) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
15. (Mines) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
16. (Mines) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\frac{2}{n\alpha}\right)^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
17. (Mines) $\frac{1}{\sqrt{n\ln^2(n)}}$
18. (Mines) $\mathrm{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right) - \mathrm{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)$
19. (Mines) $\frac{\sin(2\pi e n!)}{\ln(n)}$
20. (Mines) $\sin(\pi e n!)$.

Exercice 2 *(Mines)* Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\mathrm{d}x$.

1. Étudier le signe de u_n.
2. Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exercice 3 Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes (on pourra pour certaines utiliser la valeur de $\sum \frac{1}{n^2}$) :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$
4. (TPE) $\sum_{n=1, n\neq p}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$
5. (Mines) $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^n k^2\right)^{-1}$.

Exercice 4 *(CCPINP)*

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est définie et que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en $+\infty$.
2. Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$.
3. Exprimer $\sum_{n=1}^{N} u_n$ en fonction de Nu_{N+1} et de $\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$.
4. Montrer que $\sum_{n\geq 1} u_n = -\ln 2$.

Exercice 5 *(Mines)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.
2. On suppose que $\sum a_n$ converge. Soit $\lambda > 1$. On introduit les ensembles
$$I = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda a_n\right\} \text{ et } J = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n\right\}.$$
En considérant ces deux ensembles, montrer que $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.
3. En déduire que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge et que
$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n} + 1.$$

Exercice 6 *(Mines)* Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 7 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$. On suppose que $f'(x)/f(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. Quelle est la nature de la série $\sum (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} u_n$?

Exercice 9 *(X)** Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Nature de $\displaystyle\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 10 *(X)* Soit $u = (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_0 = 1$ et la série de terme général $\dfrac{u_n^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq 4$.

Exercice 11 *(Mines-ENS P)* Soit $\sum a_n$ une série divergente à terme général positif. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

Exercice 12 *(X)* Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$ diverge.

Exercice 13 *(X)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n$ une série absolument convergente à termes réels.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |x_n|^p$ converge pour tout réel $p \geq 1$.
2. Déterminer la limite, lorsque p tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 14 *(Ulm)* Soient $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 15 *(ENS)* Soit $u = (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{2n} + u_{2n+1}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 16 *(ULSR-Lyon)** Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. Rappeler l'inégalité arithmético-géométrique. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. La constante e est-elle optimale ?

Sommabilité :

Exercice 17 *(Mines-X)* Déterminer si les familles suivantes sont sommables :

1. $\dfrac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$, $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$
2. $\dfrac{1}{a^p}\dfrac{1}{b^q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ (avec $a > 1$ et $b > 1$ fixés)
3. $\dfrac{1}{a^p + b^q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ (avec $a > 1$ et $b > 1$ fixés)
4. $\dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$
5. $\left(\dfrac{1}{a^m + b^n}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 18 *(X)** Déterminer si la famille suivante est sommable : $\dfrac{1}{N(v)^\alpha}$, $v \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$, avec N norme sur $\mathbb{R}^d$ fixée. On admettra que toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentex.

Exercice 19 * On pose pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{1}{p^2 - q^2} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}$ et $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}$. En déduire que la famille n'est pas sommable.

Exercice 20 Montrer la convergence et calculer les sommes suivantes (éventuellement en fonction des $\zeta(k)$) :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2q^2}$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\wedge q = 1}} \frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, après avoir montré la convergence des séries.

Exercice 22 Montrer que pour $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Exercice 23 *(Mines)* Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\left(2^n(\zeta(n)-1)-1\right)$.

Exercice 24 *(Mines)** On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler et ζ la fonction de Riemann.

1. Montrer que, pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$. Que dire pour $\alpha \leq 1$?
2. Montrer que, pour $\alpha > 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$. Que dire pour $\alpha \leq 2$?

Exemples et contre-exemples :

Exercice 25 *(Mines)* Existe-t-il une suite u à valeurs réelles strictement positives telle que $\sum u_n$ converge et telle que $\ln u_n \sim -\ln n$?

Exercice 26 *(Mines)** Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

1. Suffit-il que (na_n) tende vers 0 pour que la série $\sum a_n$ converge ?
2. La convergence de $\sum a_n$ entraîne-t-elle que (na_n) tend vers 0 ?
3. Si la suite (a_n) est décroissante, montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Exercice 27 *(Mines)* Soit u une suite réelle positive décroissante.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum nu_{n^2}$ converge.
2. Étudier le lien entre la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum n^2u_{n^2}$.

Exercice 28 *(Mines)* Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^3$ diverge ?

Exercice 29 *(ENS)**

1. Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ famille sommable. Montrer que pour tout $k \geq 2$ la famille (u_n^k) est sommable.
2. Soient u et v deux familles sommables telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k$. Montrer qu'il existe une permutation ϕ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{\phi(n)}$.
3. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe N et deux suites $(u_n)_{0 \leq k \leq N}$ et $(v_n)_{0 \leq k \leq N}$ telles que pour tout $k \in A$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^k = \sum_{n=0}^{N} v_n^k$, mais qu'il n'existe aucune permutation de $[\![0, N]\!]$ telle que pour tout n, $u_n = v_{\phi(n)}$.
4. Trouver une partie infinie de A et deux suitess complexes u et v telles que pour tout $k \in A$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k$, mais telles que u ne soit pas une permutation des éléments de v.

Autour de Raab-Duhamel :

Exercice 30 *(Mines)** Soient $0 < a < b$ et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$. Déterminer une CNS pour que la série de terme général u_n converge. Dans ce cas, donner la somme $\sum n(u_{n+1} - u_n)$. Puis calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 31 *(Mines)** Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. En déduire l'existence de $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$.

Exercice 32 *(SR)*

1. Soient (a_n) et $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Que peut-on dire des séries de termes généraux a_n et b_n ?
2. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, avec $\alpha > -1$. Montrer que $\sum a_n$ diverge.
3. Que peut-on dire si $\alpha < -1$?

Comparaison séries-intégrales :

Exercice 33 *(CCPIN)**

1. Expliquer que pour tout $x \in [0, 1[$ la série $\sum \dfrac{x^n}{1 + x^n}$ converge. Que peut-on dit pour $x = 1$?
2. On note, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$. En utilisant la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-ut}}{1 + \mathrm{e}^{-ut}} \end{cases}$ (pour un u bien choisi), trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 34 *(Mines)* Soit f une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

1. On suppose que $f(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(x)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n \to +\infty}{\sim} \int_0^n f$.
2. Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse $f(x+1) \underset{x \to +\infty}{\sim} f(x)$?

Exercice 35 *(Mines)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$, $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $x_n = \ell + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Exprimer u_n en fonction de v_n et de w_n.
3. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et exprimer sa limite en fonction de γ.

Exercice 36 *(Centrale)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $d_n = \text{Card}\{p \in [\![1, n]\!] \ ; \ p \mid n\}$. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on définit $f(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant x} d_k$.

1. Cours : comparaison série-intégrale. L'utiliser pour montrer l'équivalent $H_n \sim \ln n$.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.
3. Déterminer le deuxième terme du développement asymptotique de f.

Exercice 37 *(X)* * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, on note ℓ sa limite.
2. Montrer que $\ell = -(1+\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Exercice 38 *(Mines-X)** Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la suite des $\left(\int_1^n |f'(t)| \, \mathrm{d}t \right)_n$ est bornée.

1. Montrer que les séries $\sum f(n)$ et $\sum \int_n^{n+1} f(t) \, \mathrm{d}t$ ont même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 39 *(X-ENS-Mines)***

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge. En fonction des valeurs de α, quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$?
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge. En fonction des valeurs de α, quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$?

Exercice 40 *(Mines)* Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

1. On suppose $\sum u_n$ convergente et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Construire à partir de R_n une suite $v_n > 0$ croissante tendant vers $+\infty$ telle que $\sum u_n v_n$ converge.
2. On suppose $\sum u_n$ divergente. Construire v_n décroissante qui tend vers 0 telle que $\sum u_n v_n$ diverge.

Exercice 41 *(X)* Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : pour tout $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum y_n^2$ converge, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.
Indication : on pourra poser $y_n = \frac{x_n}{\sum_{k=0}^n x_k^2}$.

Exercice 42 *(PLSR)* Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\sum {a_n}^p$ et $\sum {b_n}^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{{R_n}^\alpha}$.
3. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum {b_n}^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum {a_n}^p$ converge.

Sommation des relations de comparaison :

Exercice 43 *(Centrale)* Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$. On suppose que $a_n S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

1. Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
2. Donner un équivalent de a_n.

Exercice 44 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*}\right)$ telle que $f(0) = 1$ et $f' < 0$. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$.

1. Montrer que (a_n) est une suite décroissante positive convergeant vers 0.
2. Montrer que $\sum a_n$ diverge.

Exercice 45 *(X)* Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite u par les conditions $u_0 = a$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \tanh(u_{n-1})$.

1. Montrer la convergence de la suite u.
2. Donner un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 46 *(X)** Soient $c > 0$ et $f : [0, c] \longrightarrow [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$ avec $a > 0$ et $\alpha > 0$.

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{a\alpha n}\right)^{1/\alpha}$.
3. Traiter l'exemple de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ puis de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+2x}$.

Exercice 47 *(Mines-Centrale)** Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) converge-t-elle ? (On pourra montrer que (u_n) converge pour $\alpha > 1$ vers une limite notée ℓ.)
2. Trouver un équivalement de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge.
3. Trouver un équivalent de u_n dans le cas où la suite (u_n) diverge. vers ℓ. (on pourra étudier $u_{n+1}^2 - u_n^2$).

Exercice 48 *(Mines)* On considère la suite réelle définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+x_n}{2}}$ pour tout $n \geq 0$. Étudier la convergence de la série $\sum(1 - x_n)$.

Exercice 49 *(X)* Soit (a_n) une suite décroissante positive, $0 < a < 1$ et $c > 0$. Montrer que $a_n \sim c/n^a$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \dfrac{c\,n^{1-a}}{1-a}$.

Exercice 50 *(X)*

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$. On suppose que $\dfrac{S_n}{nu_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a > 0$. Déterminer la nature de (S_n). Donner un équivalent de $\dfrac{1}{u_n}\sum_{k=0}^{n} k u_k$.
2. Soient $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $T_n = v_0 + \cdots + v_n$. On suppose que $\dfrac{S_n}{nu_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\dfrac{T_n}{nv_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b \in \mathbb{R}^{+*}$. Donner un équivalent de $\dfrac{1}{u_n v_n}\sum_{k=0}^{n} u_k v_k$.

Transformation d'Abel :

Exercice 51 *(Mines)** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge et que dans ce cas les deux séries ont la même somme et que $nu_n \to 0$.

Exercice 52 *(X)* Soient A une partie de $\mathbb{N}^*$, et f, g définies par : $\forall n \geq 2$,

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k \in A} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{k \in A}}{k}.$$

Pour $l \in \mathbb{R}_+$, comparer les assertions $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n) = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = l$.

Exercice 53 *(Ulm)* Soient ω une racine complexe de l'unité et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Étudier la nature de la série $\sum \omega^n u_n$.

Exercice 54 *(Ulm)* Soient $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum \epsilon_n a_n$ converge. Montrer que $a_n \sum\limits_{k=0}^{n} \epsilon_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Décomposition d'un réel :

Exercice 55 *(Centrale)* Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ où :

1. $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ a un 9 dans son écriture décimale} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ n'a pas de 9 dans son écriture décimale} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 56 *(ULCR)* Soit $q \in]1, 2[$. Montrer qu'il existe $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$, suite à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n q^{-n} = 1$.

Exercice 57 *(X)* Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non tous nuls telle que $b_{n+1} \geq 2b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\theta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 10^{-b_n}$ est un irrationnel.

Exercice 58 (ULSR) On note $S \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites croissantes d'entiers naturels telles que $u_0 \geq 2$. On pose ψ: $\begin{cases} S & \to]0, 1] \\ (u_n)_n & \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n} u_k} \end{cases}$.

1. Montrer que ψ est bien définie.
2. Montrer que ψ est une bijection de S vers $]0, 1]$.
3. À quelle condition sur $a \in S$, a-t-on $\psi(a) \in \mathbb{Q}$?

Exercice 59 *(ENS)** Soit $x \in [0, 1[$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les chiffres de son écriture décimale propre. Montrer l'équivalence :

$$(x \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\exists N \in \mathbb{N},\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ a_{n+q} = a_n).$$

Exercice 60 *(Lyon)* Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i\geq 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geq {n_i}^2$ et que $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n_i}\right)$.
2. Généraliser ce résultat.

Exercice 61 *(X)* Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, soit $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2,\ v_n = \dfrac{1}{\ln(n)} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{k}$.

1. Que dire de $(v_n)_{n\geq 2}$ si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers le réel ℓ ?
2. On suppose que u_n est égal à 1 si le premier chiffre de l'écriture de n en base 10 est 1, à 0 sinon. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\geq 2}$, puis celle de (w_n).

Exercice 62 *(ULSR)**

1. On considère un réel $x \geq 1$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times [\![1, Q]\!]$ tel que $\left| x - \dfrac{p}{q} \right| \leq \dfrac{1}{qQ}$.

2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ (nombre de Liouville) est transcendant.

Applications :

Exercice 63 *(Centrale-X)** Pour tout $n \geq 2$, on note $P(n) = \max\{p \text{ premier}, \ p|n\}$. On souhaite étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{nP(n)}$ (on pourra utiliser des regroupements par paquets).

1. On note q_n le n-ième nombre premier ; montrer que $\forall k \geq 1$, $q_k \geq 2k - 1$.

   On pose $A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{q_k}}$.

2. Montrer que $\sum \frac{1}{nP(n)}$ converge si et seulement si $\sum \frac{A_n}{q_n^2}$ converge et qu'elles ont même somme en cas de convergence.
3. Montrer l'existence d'une constante C telle que : $\forall n \geq 2$, $\ln(A_n) \leq C_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \leq C + \frac{1}{2} \ln(n)$.
4. Conclure.

Exercice 64 (Mines) .On note pour $j \in \mathbb{N}^*$, $k_j = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}$.

1. Montrer que k_j est bien définie.
2. Nature de $(k_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $\lim_{j \to +\infty} \frac{k_{j+1}}{k_j} = e$.

Exercice 65 *(X)* Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $d(k)$ le nombre de diviseurs de k dans $\mathbb{N}^*$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \sum_{k=1}^{n} d(k)$. Donner un équivalent de D_n.
2. Soit γ la constante d'Euler. Montrer que $D_n = n\ln(n) + (2\gamma - 1)n + O\left(\sqrt{n}\right)$.

Exercice 66 *(X)** On rappelle que μ désigne la fonction de Möbius et ζ la fonction de Riemann.

1. Montrer que $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.
2. On rappelle que ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\phi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.
3. Montrer que $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \phi(k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{\pi^2}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$, et on note p_n la probabilité de l'événement $(X_n \wedge Y_n = 1)$. Montrer que la suite (p_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 67 *(Lyon)* Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On note, pour $\alpha \geqslant 0$,

$$\mathcal{R}_\alpha = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n a_n \leqslant \alpha \right\}.$$

Soit $(b_n)_{n \geqslant 1}$ une suite réelle positive sommable. Pour tout $\alpha > 0$, construire une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_\alpha$ telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n b_n = \max_{(u_n) \in \mathcal{R}_\alpha} \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n b_n \right\}$.