Problème 1 (Mesure de Mahler et hauteur d'un polynôme)

Dans tout le problème, d désigne un entier supérieur ou égal à 1. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on appelle hauteur de P la quantité

$$H(P) = \max_{0 \leq i \leq d} |a_i|,$$

et mesure de Mahler de P la quantité

$$M(P) = |a_d| \prod_{k=1}^{d} \max\{1, |r_k|\}$$

où les $(r_i)_{1 \leq i \leq d}$ sont les racines complexes de P comptées avec multiplicités.

L'objectif du problème est d'établir des encadrements de ces quantités, et notamment de montrer que si P est de degré d, alors

$$\frac{M(P)}{\sqrt{d+1}} \leq H(P) \leq 2^{d-1} M(P).$$

I. **Propriétés de la mesure de Mahler**

(1) Pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non constants, montrer que $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

(2) Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on appelle polynôme réciproque $P^* = X^d P\left(\dfrac{1}{X}\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^{d-k}$. Montrer que $M(P^*) = M(P)$ et $H(P^*) = H(P)$.

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $M(P(X^n)) = M(P)$.

II. **Une première inégalité**

On fixe dans cette partie $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré d.

(1) Montrer que pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

(2) Montrer que pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, on a $\dbinom{d}{k} \leq 2^{d-1}$.

(3) Rappeler sans démonstration la formule donnant a_k/a_d en fonction des racines $r_1, \ldots, r_d$ (comptées avec multiplicités) de P.

(4) Montrer que pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $|a_k| \leq \dbinom{d}{k} M(P)$.

(5) Montrer que $H(P) \leq 2^{d-1} M(P)$.

III. **Formule de Jensen**

(1) Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ et $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln |r - e^{it}|^2 \, \mathrm{d}t$.

a. Justifier l'existence de $I(r)$.

b. Montrer que $I(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(r^2 - 2r\cos t + 1) \, \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \ln(r^2 - 2r\cos t + 1) \, \mathrm{d}t$.

c. Montrer que

$$I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ 4\pi \ln |r| & \text{si } |r| > 1. \end{cases}$$

(On pourra utiliser une somme de Riemann.)

(2) On suppose $P = X - \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $|\alpha| \neq 1$. Montrer que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln |P(e^{it})| \, \mathrm{d}t$ ne dépend que du module $|\alpha|$ (et pas de l'argument de α). Et établir que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |P(e^{it})| dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |\alpha| < 1 \\ \ln |\alpha| & \text{si } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

(3) (Lemme de Jensen) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ sans racines de module 1. Montrer que

$$M(P) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln |f(e^{it})| dt\right).$$

(4) Montrer l'inégalité de Jensen : si $u \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, alors

$$\exp \int_0^1 u(t) dt \leq \int_0^1 \exp(u(t)) dt.$$

IV. **Deuxième inégalité**

(1) Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{d} a_k e^{2i\pi k t} \right|^2 dt$ en fonction des $|a_k|$.

(2) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d sans racine de module 1, on a
$$\frac{M(P)}{\sqrt{d+1}} \leq H(P).$$

(3) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré d, on a
$$\frac{M(P)}{\sqrt{d+1}} \leq H(P).$$

V. **Inégalité pour un polynôme totalement positif**

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est totalement positif si toutes ses racines sont réelles positives. Soit P totalement positif de degré d.

(1) Soit $0 < c < \dfrac{1}{2}$.

a. Soit $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \ln(\max(1, |x|)) - c\ln(x) - (1-2c)\ln|x-1|$. Exprimer en fonction de c, $m = \min\limits_{\mathbb{R}_+^*} f$.

b. Montrer que $M(P) \geq |P(0)|^c |P(1)|^{1-2c} \mathrm{e}^{md}$.

(2) En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d est unitaire, totalement positif, non divisible par X et vérifie $|P(1)| \geq 1$, alors
$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}{2}.$$