

Programme de colles - Semaine 4 - du 13/09 au 17/10

Polynômes et fractions rationnelles : Exercices de révisions sur le programme de la semaine précédente.

Algèbre linéaire sans réduction :

Somme d'un nombre fini de sous-espaces : Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. Caractérisation par l'intersection. Somme d'un nombre fini de sous-espaces. Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. La somme $F_1 + \dots + F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1 + \dots + F_p$ sous la forme $x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Sous-espaces supplémentaires. Espaces supplémentaires, caractérisations. Cas de la dimension finie.

Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \text{Id}$. Projecteurs associés à une décomposition $E = \bigoplus_{j=1}^s F_j$.

Changements de bases : Matrice de changement de base. La matrice de passage de e à e' est la matrice de la famille e' dans la base e . Inversibilité et inverse de cette matrice. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

Matrices équivalentes et semblables : Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , il existe une base e de E et une base f de F telles que : $\text{Mat}_{e,f}(u) = J_r$. Matrices équivalentes. Interprétation géométrique. Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r . Classification des matrices équivalentes par le rang. Invariance du rang par transposition. Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Matrices semblables. Interprétation géométrique. (Une matrice est semblable à une matrice J_r si et seulement si il s'agit d'une matrice de projecteur).

Pivot de Gauss : matrices de transvection et leur effet par multiplication à gauche et à droite. Algorithme du pivot de Gauss. Les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{K})$. Générateurs de $GL_n(\mathbb{K})$.

Formes linéaires et hyperplans Forme linéaire. Hyperplan. Si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est le noyau d'une forme linéaire non nulle. En dimension n , les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n - 1$. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n , l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n - m$.

D'autres résultats classiques autour des bases duales, de la dimension exacte de l'intersection de m hyperplans ont été vues mais sont hors programme ; tous ces résultats doivent être redémontrés avant d'être utilisés.

Formes n -linéaires alternées : Forme n -linéaire alternée. Antisymétrie, effet d'une permutation. Pour une application n -linéaire équivalence entre antisymétrie et caractère alterné. Si f est une forme n -linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base : Si E est de dimension n , l'espace des formes n -linéaires alternées est de dimension 1. Si e est une base, il existe une et une seule forme n -linéaire alternée f pour laquelle $f(e) = 1$. Toute forme n -linéaire alternée est un multiple de $\det_e$. Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Comparaison, si e et e' sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Déterminant d'un endomorphisme : Déterminant d'un endomorphisme. La définition est indépendante de la base. Déterminant d'une composée. Caractérisation des automorphismes.

Déterminant d'une matrice carrée : Déterminant d'une matrice carrée. Lien avec le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base ; lien avec le déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant d'une transposée.

Caractérisation du rang d'une matrice avec les mineurs.

Comatrice : Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Comatrice. Relation $A (\text{Com}(A))^T = (\text{Com}(A))^T A = \det(A) I_n$.

Polynômes d'interpolation de Lagrange et déterminant de Vandermonde.

Suite des images et noyaux itérés : les résultats classiques.