

Dans tout le problème,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers naturels et  $n$  est un entier naturel.

On note  $\mathbb{K}_n[X]$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la  $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . La matrice unité est notée  $I_n$  et on désigne par  $GL_n(\mathbb{K})$  le groupe des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $A^\top$  la transposée de la matrice  $A$ ,  $\text{rg}(A)$  son rang,  $\text{tr}(A)$  sa trace,  $\chi_A = \det(XI_n - A)$  son polynôme caractéristique,  $\pi_A$  son polynôme minimal et  $\text{sp}(A)$  l'ensemble de ses valeurs propres dans  $\mathbb{K}$ .

Dans tout le problème,  $E$  désigne un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{K}$  de dimension finie  $n$  supérieure ou égale à 2, et  $\mathcal{L}(E)$  est l'algèbre des endomorphismes de  $E$ .

On note  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On note :

$$f^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{k+1} = f^k \circ f.$$

Si  $Q \in \mathbb{K}[X]$  avec  $Q(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$ ,  $Q(f)$  désigne l'endomorphisme  $a_0\text{Id}_E + a_1f + \dots + a_mf^m$ . On note  $\mathbb{K}[f]$  la sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(E)$  constituée des endomorphismes  $Q(f)$  quand  $Q$  décrit  $\mathbb{K}[X]$ .

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme  $f$  de  $E$  :  $\text{rg}(f)$ ,  $\text{tr}(f)$ ,  $\chi_f$ ,  $\pi_f$  et  $\text{sp}(f)$ .

Enfin, on dit que  $f$  est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur  $x_0$  dans  $E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  soit une base de  $E$ .

### I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

(A) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

1. Montrer que  $M$  et  $M^\top$  ont même spectre.
2. Montrer que  $M^\top$  est diagonalisable si et seulement si  $M$  est diagonalisable.

(B) **Matrices compagnons**

3. Soit  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$  et  $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ . On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Déterminer en fonction de  $Q$  le polynôme caractéristique de  $C_Q$ .

4. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $C_Q^\top$ . Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

(C) **Endomorphismes cycliques**

5. Montrer que  $f$  est cyclique si et seulement s'il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est de la forme  $C_Q$ , où  $Q$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ .
6. Soit  $f$  un endomorphisme cyclique. Montrer que  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_f$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et a toutes ses racines simples.
7. Montrer que si  $f$  est cyclique, alors  $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre dans  $\mathcal{L}(E)$  et le polynôme minimal de  $f$  est de degré  $n$ .

(D) **Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton**

8. Soit  $x$  un vecteur non nul de  $E$ . Montrer qu'il existe un entier  $p$  strictement positif tel que la famille  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  soit libre et qu'il existe  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$  tel que :

$$\alpha_0x + \alpha_1f(x) + \dots + \alpha_{p-1}f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

9. Justifier que  $\text{Vect}(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est stable par  $f$ .
10. Montrer que  $X^p + \alpha_{p-1}X^{p-1} + \dots + \alpha_0$  divise le polynôme  $\chi_f$ .
11. Démontrer que  $\chi_f(f)$  est l'endomorphisme nul.

### II. Étude des endomorphismes cycliques

(A) **Endomorphismes cycliques nilpotents**

Dans cette sous-partie, on suppose que  $f$  est un endomorphisme nilpotent de  $E$ . On note  $r$  le plus petit entier naturel tel que  $f^r = 0$ .

12. Montrer que  $f$  est cyclique si et seulement si  $r = n$ . Préciser alors la matrice compagnon.

(B) Dans cette sous-partie II.B, on suppose  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

On suppose que  $(\text{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1})$  est libre et on se propose de montrer que  $f$  est cyclique.

On factorise le polynôme caractéristique de  $f$  sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les  $\lambda_k$  sont les  $p$  valeurs propres deux à deux distinctes de  $f$  et les  $m_k$  de  $\mathbb{N}^*$  leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on pose  $F_k = \ker((f - \lambda_k \text{Id}_E)^{m_k})$ .

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels  $F_k$  sont stables et que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $\varphi_k$  l'endomorphisme induit par  $f - \lambda_k \text{Id}$  sur le sous-espace vectoriel  $F_k$ ,

$$\varphi_k : \begin{cases} F_k \rightarrow F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que  $\varphi_k$  est un endomorphisme nilpotent de  $F_k$ .

On note  $\nu_k$  le plus petit entier naturel tel que  $\varphi_k^{\nu_k} = 0$ .

15. Pourquoi a-t-on  $\nu_k \leq \dim(F_k)$  ?

16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $\nu_k = m_k$ .

17. Expliciter la dimension de  $F_k$  pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , puis en déduire l'existence d'une base  $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$  de  $E$  dans laquelle  $f$  a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à  $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$  et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose  $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \dots + u_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}$ .

18. Déterminer les polynômes  $Q \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $Q(f)(x_0) = 0$ .

19. Justifier que  $f$  est cyclique.

### III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de  $f$  l'ensemble  $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / f \circ g = g \circ f\}$ .

#### (A) Commutant d'un endomorphisme cyclique

20. Montrer que  $C(f)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

On suppose que  $f$  est cyclique et on choisit un vecteur  $x_0$  dans  $E$  tel que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base de  $E$ . Soit  $g \in C(f)$ , un endomorphisme qui commute avec  $f$ .

21. Justifier l'existence de  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  de  $\mathbb{K}$  tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

22. Montrer alors que  $g \in \mathbb{K}[f]$ .

23. Établir que  $g \in C(f)$  si et seulement s'il existe un polynôme  $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $g = R(f)$ .

#### (B) Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_r$  de  $E$  est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces  $F_i$  contient tous les autres.

On note  $d$  le degré de  $\pi_f$ .

25. Justifier l'existence d'un vecteur  $x_1$  de  $E$  tel que  $(x_1, f(x_1), \dots, f^{d-1}(x_1))$  est libre.

Pour tout  $x$  non nul de  $E$ , on pourra remarquer que  $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / P(f)(x) = 0\}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$  engendré par un polynôme unitaire  $\pi_{f,x}$  diviseur de  $\pi_f$  et considérer les sous-espaces vectoriels  $\ker(\pi_{f,x}(f))$ .

On pose pour  $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $e_k = f^{k-1}(x_1)$  et  $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$ .

26. Montrer que  $E_1$  est stable par  $f$  et que  $E_1 = \{P(f)(x_1) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ .

On note  $\psi_1$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $E_1$ ,

$$\psi_1 : \begin{cases} E_1 \rightarrow E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

27. Justifier que  $\psi_1$  est cyclique.

On complète, si nécessaire,  $(e_1, e_2, \dots, e_d)$  en une base  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$ . Soit  $\Phi$  la  $d$ -ième forme coordonnée qui à tout vecteur  $x$  de  $E$  associe sa coordonnée suivant  $e_d$ . On note  $F = \{x \in E / \forall i \in \mathbb{N}, \Phi(f^i(x)) = 0\}$ .

28. Montrer que  $F$  est stable par  $f$  et que  $E_1$  et  $F$  sont en somme directe.

Soit  $\Psi$  l'application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}^d$  définie, pour tout  $x \in E$ , par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leq i \leq d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \dots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

29. Montrer que  $\Psi$  induit un isomorphisme entre  $E_1$  et  $\mathbb{K}^d$ .

30. Montrer que  $E = E_1 \oplus F$ .

31. En déduire qu'il existe  $r$  sous-espaces vectoriels de  $E$ , notés  $E_1, \dots, E_r$ , tous stables par  $f$ , tels que :

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$  ;
- pour tout  $1 \leq i \leq r$ , l'endomorphisme  $\psi_i$  induit par  $f$  sur le sous-espace vectoriel  $E_i$  est cyclique ;
- si on note  $P_i$  le polynôme minimal de  $\psi_i$ , alors  $P_{i+1}$  divise  $P_i$  pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq r-1$ .

32. Exprimer  $\mu_f$  et  $\chi_f$  en fonction des polynômes  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$ .

*Pour un endomorphisme  $f$  donné, on a unicité de cette décomposition ; elle est appelée la décomposition de Frobenius et les polynômes  $(P_i)_{1 \leq i \leq r}$  sont appelés les invariants de similitude de  $f$ . On montre en effet que deux endomorphismes sont semblables si et seulement si ils ont la même suite d'invariants de similitude.*

(C) **Commutant d'un endomorphisme quelconque**

32. Montrer que la dimension de  $C(f)$  est supérieure ou égale à  $n$ .

33. On suppose que  $f$  est un endomorphisme tel que l'algèbre  $C(f)$  est égale à  $\mathbb{K}[f]$ . Montrer que  $f$  est cyclique.