

Le théorème de Burnside et plusieurs applications

Dans le sujet n désigne toujours un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. On note $M_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$ -algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'élément neutre pour la multiplication dans cette algèbre est noté I_n . On note $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$.

Une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est dite scalaire si elle s'écrit $A = \lambda I_n$ avec λ un élément de $\mathbb{K}$. La transposée d'une matrice est notée de manière usuelle A^T .

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $L(E)$ désigne la $\mathbb{K}$ -algèbre des endomorphismes de E . Une partie non vide de $M_n(\mathbb{K})$ ou de $L(E)$ est dite commutative si deux quelconques de ses éléments commutent.

Les éléments d'une partie non vide $\mathcal{A}$ de $M_n(\mathbb{K})$ sont dits co-trigonalisables s'il existe une matrice inversible P telle que pour toute matrice A de $\mathcal{A}$, $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure. Les éléments d'une partie non vide $\mathcal{A}$ de $L(E)$ sont dits co-trigonalisables s'il existe une base de E dans laquelle tous les éléments de $\mathcal{A}$ ont une matrice triangulaire supérieure. Cela revient à dire que l'ensemble formé des matrices des éléments de $\mathcal{A}$ dans une base donnée est formé d'éléments co-trigonalisables.

Une partie de $L(E)$ est dite irréductible si les seuls sous-espaces de E stables par tous ses éléments sont $\{0\}$ et E . Elle est dite réductible sinon.

Une sous-algèbre de l'algèbre $L(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ stable par composition et contenant l'application identité. La sous-algèbre engendrée par une partie de $L(E)$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) sous-algèbre de $L(E)$ contenant cette partie. Une sous-algèbre de l'algèbre $M_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ stable par produit et contenant la matrice I_n . La sous-algèbre engendrée par une partie de $M_n(\mathbb{K})$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ contenant cette partie.

Dans une première partie, on établira des résultats préliminaires qui pourront être admis et utilisés tout au long du sujet. Dans la deuxième partie, on démontrera le théorème de Burnside sur les sous-algèbres irréductibles (qui pourra être admis dans les parties suivantes). Dans les trois parties suivantes, indépendantes entre elles, on étudiera des applications de ce théorème, notamment à la co-trigonalisation.

I. Résultats préliminaires

- (1) Soit $(f_1, \dots, f_d)$ une famille libre de formes linéaires sur un espace vectoriel E . On veut démontrer que le sous-espace vectoriel $F = \bigcap_{j=1}^d \text{Ker}(f_j)$ a pour dimension $\dim(E) - d$.

- a. Montrer que $\theta: \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K}^d \\ x & \mapsto (f_1(x), \dots, f_d(x)) \end{cases}$ est surjective.

- b. Conclure.

- (2) Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^* espace des formes linéaires sur E .

- a. En utilisant l'application θ introduite ci-dessus, démontrer qu'il existe une famille $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$ tels que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $f_i(e_j) = \delta_{i,j}$.

- b. Démontrer que cette famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{j=1}^n f_j(x)e_j$.

- (3) a. Démontrer que si f est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$, on ait $f(M) = \text{Tr}(AM)$.

- b. Montrer que si les matrices $M_1, M_2, \dots, M_{n^2}$ forment une base de $M_n(\mathbb{K})$ alors les formes linéaires $(f_1, \dots, f_{n^2})$ définies pour tout entier $i \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$ par $f_i(M) = \text{Tr}(M_i M)$, forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires sur $M_n(\mathbb{K})$. En déduire qu'il existe une base $(F_1, \dots, F_{n^2})$ de $M_n(\mathbb{K})$ telle que pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{K})$ on ait :

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} \text{Tr}(M_i M) F_i.$$

- c. Démontrer que si f est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{K})$ telle que $f(MN) = f(NM)$ pour toutes matrices M et N de $M_n(\mathbb{K})$ alors f est proportionnelle à la trace.

- (4) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$ engendrée par G .

- a. Démontrer que $\mathcal{G} = \text{Vect}(G)$ où $\text{Vect}(G)$ désigne le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ engendré par G .

- b. Démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{G}$ formée d'éléments de G .

II. Le théorème de Burnside

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On note $\mathcal{A}$ une partie non vide de $L(E)$ et on suppose que les seuls sous-espaces stables de E stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont E et $\{0\}$, c'est-à-dire que $\mathcal{A}$ est irréductible.

- (1) Démontrer que l'ensemble des éléments de $L(E)$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont exactement les homothéties. On pourra considérer une valeur propre d'un tel endomorphisme.
- (2) Démontrer à l'aide d'un exemple en dimension 2 que le résultat de la question précédente tombe en défaut si $\mathbb{C}$ est remplacé par $\mathbb{R}$.

On suppose désormais de plus dans cette partie que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$. Le but des questions II6 jusqu'à II9 est de démontrer que $\mathcal{A} = L(E)$, ce qui constitue le théorème de Burnside, dont l'énoncé suit.

Théorème (Burnside) : Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $L(E)$, alors $\mathcal{A} = L(E)$.

Les trois questions suivantes sont indépendantes de la démonstration. On y illustre l'importance des hypothèses faites dans le théorème de Burnside.

- (3) Dans cette question, on confond matrice de $M_3(\mathbb{C})$ et endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé. On définit

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

- a. Démontrer que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents.
- b. Démontrer que la sous-algèbre de $M_3(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathcal{A}$ contient toutes les matrices diagonales. On pourra considérer A dans $\mathcal{A}$ formée avec $a = 0$ et $b = 1$ et B formée avec $a = 1$ et $b = 0$.
- c. Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$ stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$.
- (4) Dans cette question on note u l'endomorphisme de $\mathbb{Q}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $L(\mathbb{Q}^3)$ engendrée par u .

- a. Démontrer que le polynôme $X^3 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- b. Expliciter une base de $\mathcal{A}$ en fonction de u .

- c. Démontrer que $\mathcal{A}$ est un corps.
- d. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{Q}^3$ stables par u .
- (5) Que peut-on en déduire quant aux hypothèses du théorème de Burnside ?

On commence désormais la démonstration du théorème de Burnside.

On considère l'espace vectoriel E^n et ρ le morphisme de $L(E)$ vers $L(E^n)$ qui à $f \in L(E)$ associe l'endomorphisme $\rho(f)$ de E^n donné par $\rho(f) : (v_1, \dots, v_n) \mapsto (f(v_1), \dots, f(v_n))$.

On désigne par E_i le sous-espace vectoriel de E^n défini par $E_i = \{0\} \times \dots \times \{0\} \times E \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ où tous les termes sont $\{0\}$ sauf le terme numéro i qui est E . Ainsi $E^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$.

On fixe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Cela détermine une base de chaque E_i , et une base de $E^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$. Dans cette base, un élément de $L(E^n)$ est donc représenté par une matrice de taille n^2 par blocs, tous de taille n .

- (6) a. Décrire dans la base ci-dessus la matrice par blocs d'un élément de $L(E^n)$ qui commute avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des endomorphismes de E^n qui commutent avec tous les éléments $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.
- b. Démontrer que si $f \in L(E)$, alors $\rho(f)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{C}$. On pourra considérer la matrice par blocs de $\rho(f)$.
- (7) Soit $W \subset E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. On se propose de démontrer que W admet un supplémentaire dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.
 - a. Démontrer que si $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $W \cap E_i = \{0\}$ ou $W \cap E_i = E_i$.
 - b. Si $W \cap E_1 = \{0\}$ on pose $W_2 = W \oplus E_1$ et si $W \cap E_1 = E_1$ on pose $W_2 = W$. Que vaut $W_2 \cap E_2$?
 - c. En poursuivant comme ci-dessus, construire une suite croissante $W_1 = W, W_2, \dots, W_n$ de sous-espaces de E^n stables par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$, avec $W_n = E^n$ et en déduire l'existence d'un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.
- (8) Soit $W \subset E^n$ un sous-espace vectoriel stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Soit W' un supplémentaire de W dans E^n également stable par tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Notons $p : E^n \rightarrow E^n$ la projection sur W parallèlement à W' . Démontrer que p commute avec tous les $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

- (9) Soit $W \subset E^n$ l'ensemble formé des éléments $(a(e_1), \dots, a(e_n))$ quand a décrit $\mathcal{A}$. Vérifier que W est un sous-espace vectoriel de E^n et qu'il est stable par tous les $\rho(b)$ pour $b \in \mathcal{A}$. En utilisant la question précédente, démontrer que si $f \in L(E)$, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a(e_1), \dots, a(e_n))$. Conclure que $\mathcal{A} = L(E)$ et énoncer finalement le résultat obtenu.

III. Premières applications

- (1) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que G est irréductible et que les valeurs propres des éléments de G sont toutes de module égal à 1. On désire montrer que le groupe G est borné.
- Démontrer qu'il existe une base $(M_1, \dots, M_{n^2})$ de $M_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G .
 - Démontrer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n^2$ et tout élément M de G , on a $|\text{Tr}(M_i M)| \leq n$. En déduire que le groupe G est borné pour toute norme sur $M_n(\mathbb{C})$.
- (2) Soit G un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^n)$ formé d'éléments tous unipotents, c'est-à-dire tel que pour tout $g \in G$ la seule valeur propre de g soit 1. On désire démontrer que tous les éléments de G sont co-trigonalisables ce qui constitue un théorème dû à Kolchin. On note $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $L(\mathbb{C}^n)$ engendrée par G .
- Démontrer qu'un endomorphisme g de $\mathbb{C}^n$ admet 1 comme seule valeur propre si et seulement si $g - \text{Id}_{\mathbb{C}^n}$ est nilpotent.
On suppose que $\mathcal{G}$ est irréductible. Soit a un élément de G . On écrit $a = \text{Id}_{\mathbb{C}^n} + b$ avec b nilpotent.
 - Démontrer que pour tout élément f de G , $\text{Tr}(b \circ f) = 0$.
 - En déduire que $b = 0$ puis que l'hypothèse faite sur l'irréductibilité de $\mathcal{G}$ est absurde.
On en déduit donc que $\mathcal{G}$ n'est pas irréductible.
 - Démontrer le théorème de Kolchin énoncé ci-dessus en procédant par récurrence.

IV. Autour des matrices magiques et des matrices de permutation

Dans cette partie, on exploite le théorème de Burnside afin de démontrer que l'espace des matrices magiques est exactement le sous-espace engendré par les matrices de permutation.

Si $M = (m_{i,j})$ est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, on dit que M est **magique** si la somme de ses coefficients par ligne et par colonne est constante. On note $\mathcal{M}$

l'ensemble des matrices magiques de $M_n(\mathbb{C})$. C'est clairement un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.

Si σ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, on note p_σ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini sur la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ par $p_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour tout i et P_σ la matrice de p_σ dans la cette même base.

On note D la droite dirigée par le vecteur $e_1 + \dots + e_n$ et H l'hyperplan d'équation $x_1 + \dots + x_n = 0$ dans la base $\mathcal{C}$.

- Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on note f_i (resp. g_i) la forme linéaire qui à une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ associe la somme des coefficients de la ligne i (resp. la colonne i). Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$ est liée mais que $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_{n-1})$ est libre.
- Déterminer la dimension du sous-espace $\mathcal{M}_0$ de $\mathcal{M}$ formé des matrices dont la somme des éléments de chaque ligne et de chaque colonne vaut 0.
- En déduire la dimension de $\mathcal{M}$.
- Justifier que l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ est inclus dans $\mathcal{M}$.
- Démontrer que si m est un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ de matrice M dans la base $\mathcal{C}$, alors $M \in \mathcal{M}$ si et seulement si H et D sont stables par m .
- Démontrer que les seuls sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ stables par tous les endomorphismes p_σ quand σ parcourt toutes les permutations de $\{1, \dots, n\}$ sont $\{0\}$, la droite D , l'hyperplan H et $\mathbb{C}^n$. On pourra traiter le cas d'une droite puis celui d'un sous-espace non inclus dans D .
- Pour toute permutation σ de $\{1, \dots, n\}$, on note q_σ l'application induite par p_σ sur H . Démontrer que tout endomorphisme f de H peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^N \lambda_i q_{\sigma_i}$$

avec $N \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{C}$ et $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ des permutations de $\{1, \dots, n\}$. On utilisera le théorème de Burnside démontré à la partie II.

- Soit $M \in \mathcal{M}$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Démontrer l'existence de N dans $\mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ dans $\mathbb{C}$, $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ des

permutations de $\{1, \dots, n\}$ et α dans $\mathbb{C}$ tels que

$$m = \sum_{i=1}^N \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u.$$

- (9) Établir un lien entre l'endomorphisme u et la somme des endomorphismes p_σ quand σ parcourt l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et en déduire que l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ formé des matrices magiques est exactement l'espace vectoriel engendré par les matrices de permutation P_σ .

V. Lemme fondamental de co-trigonalisation et applications

Tous les espaces vectoriels E considérés dans cette partie sont de dimension finie et le corps de base est $\mathbb{C}$. On se propose d'établir un lemme de co-trigonalisation, appelé ci-dessous lemme fondamental de co-trigonalisation. Ce résultat combiné au théorème de Burnside permet de disposer d'un moyen efficace de preuves de co-trigonalisabilité.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété vérifiée par une famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes. On ne considèrera que des propriétés transmises par isomorphisme d'algèbres. On dit que cette propriété est également transmise par passage au quotient, si : pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E tels que $G \subset F \subset E$ et tels que F et G soient stables par les éléments de $\mathcal{F}$, si pour $u \in \mathcal{F}$, on note $\tilde{u}$ l'endomorphisme par u sur F et que l'on considère la matrice M_u de $\tilde{u}$ dans une base f de F obtenue en complétant une base de G , $M_u = \begin{pmatrix} A_u & B_u \\ 0 & C_u \end{pmatrix}$, alors la famille d'endomorphisme canoniquement associé aux $(C_u)_{u \in \mathcal{F}}$ sur $\mathbb{K}^d$ (en notant $d = \dim(F) - \dim(G)$) vérifie encore la même propriété $\mathcal{P}$.

- (1) Montrer que les propriétés *tous les éléments de $\mathcal{F}$ sont nilpotents* ou *les éléments de $\mathcal{F}$ commutent deux à deux* sont des propriétés qui sont transmises par passage au quotient.
- (2) Soit $\mathcal{F}$ une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel E , vérifiant une propriété $\mathcal{P}$ transmise par passage au quotient. Soit F un sous-espace de E stable par tous les éléments de $\mathcal{F}$. Démontrer que la famille formée des endomorphismes induits par les éléments de $\mathcal{F}$ sur F vérifie encore la propriété $\mathcal{P}$.
- (3) **Le lemme fondamental de co-trigonalisation :** On se donne une propriété $\mathcal{P}$ transmise par passage au quotient et on suppose qu'elle vérifie la condition suivante : toute famille d'endomorphismes définis sur un même espace vectoriel de dimension au moins 2 vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ est réductible.

Démontrer qu'une famille $\mathcal{F}$ d'endomorphismes qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ est co-trigonalisable.

On pourra noter E l'espace vectoriel sur lequel sont définis les endomorphismes de la famille $\mathcal{F}$ et envisager une suite strictement croissante $\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \cdots \subset L_m = E$ de sous-espaces de E tous stables par les éléments de $\mathcal{F}$ et de cardinal m maximal.

- (4) Soit $\mathcal{C}$ une famille d'endomorphismes qui commutent 2 à 2. Montrer que les éléments de $\mathcal{C}$ sont co-trigonalisables.
- (5) On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre non unitaire (c'est-à-dire ne contenant pas l'identité) d'endomorphismes formés d'éléments tous nilpotents.
 - a. Démontrer que dans un espace vectoriel de dimension au moins 2, une telle algèbre est réductible. On peut utiliser le théorème de Burnside et la propriété $\mathcal{P}$ définie par : *être une algèbre non unitaire d'endomorphismes formée d'éléments tous nilpotents*.
 - b. En déduire que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.
- (6) On suppose que $\mathcal{A}$ est une algèbre d'endomorphismes telle que pour tous f et g dans $\mathcal{A}$, $f \circ g - g \circ f$ (appelé commutateur de f et g) soit nilpotent.
 - a. Démontrer que si $n \geq 2$, il existe deux matrices B et C de $M_n(\mathbb{C})$ telles que la matrice $BC - CB$ ne soit pas nilpotente.
 - b. Démontrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.