

Les 4 premières parties de ce sujet sont en fait des rappels de cours sur les choses à connaître sur les parties dénombrables. Vous pouvez vérifier que vous connaissez bien les résultats et leurs démonstrations (mais sans les rendre sauf si vous souhaitez que je vérifie votre rédaction). Le V et le VI sont des TD-Cours sur des choses très classiques (que vous pouvez choisir de rendre ou pas). Le véritable DM commence en partie VII.

I. Introduction :

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notons a le plus petit élément de A . On définit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'application f de $\mathbb{N}$ dans A par :

$$\begin{cases} (1) & f(0) = a; \\ (2) & \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n+1) = \text{Min}(A - \{f(0), f(1), \dots, f(n)\}). \end{cases}$$

- (1) Justifier que l'application f est bien définie.
- (2) Démontrer que l'application f est strictement croissante. En déduire que f est une injection de $\mathbb{N}$ dans A .
- (3) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ sur A .

Nous venons de démontrer le résultat suivant : *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}$.*

Définition 1 On dit qu'un ensemble infini est **dénombrable** si il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Intuitivement, un ensemble infini est donc dénombrable lorsque l'on peut "numéroter" ses éléments par $\mathbb{N}$.

II. Quelques premiers résultats :

- (1) Montrer qu'un ensemble infini A est dénombrable si et seulement si il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.
- (2) Plus généralement, montrer que si A est un ensemble infini et s'il existe une injection de A dans B où B est dénombrable, alors A est dénombrable.
- (3) Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable.
- (4) Expliquer que si $A \subset B$ est une partie infinie de B et si B est dénombrable alors A l'est également.

Définition 2 On note dans ce sujet FD les ensembles "finis ou dénombrables", c'est-à-dire les ensembles dont on peut "numéroter" les éléments.

- (5) Expliquer qu'un ensemble A est FD si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

- (6) Expliquer qu'un ensemble A est de type FD, si et seulement si il existe une injection de A dans $\mathbb{N}$.
- (7) Montrer que si A est FD et s'il existe une injection de B vers A alors B est FD.
- (8) Expliquer que toute partie d'un ensemble de type FD est de type FD.

III. Dénombrabilité de $\mathbb{N}^k$:

- (1) Montrer sur un dessin comment l'on pourrait numéroter les éléments de $\mathbb{N}^2$. Plutôt que de formaliser cette preuve difficile à rédiger, on choisit une autre méthode :
- (2) Montrer que $f : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \rightarrow \mathbb{N} \\ (n, m) & \mapsto 2^n 3^m \end{cases}$ est injective. Conclure.
- (3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^k$ est dénombrable.

IV. Opérations sur les ensembles dénombrables :

- (1) Montrer que si $A_1, \dots, A_n$ sont des ensembles de type FD alors $A_1 \times \dots \times A_n$ est de type FD.
- (2) En déduire qu'un produit fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- (3) Donner une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Conclusion ?
- (4) Soit E un ensemble, A et B deux parties de E de type FD. On considère donc $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ deux injections et on pose

$$h : \begin{cases} A \cup B & \rightarrow \mathbb{N}^2 \\ x & \mapsto \begin{cases} (f(x), 0) & \text{si } x \in A \\ (g(x), 1) & \text{si } x \in B \setminus A \end{cases} \end{cases}.$$

Montrer que h est injective. Conclusion ?

- (5) Soit E un ensemble. Soit I un ensemble de type FD et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties toutes de type FD d'un ensemble E . Montrer que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est de type FD.
- (6) En déduire que l'union dénombrable de parties dénombrables est dénombrable.

V. Ensemble des nombres algébriques :

On dit qu'un réel x est **algébrique** si il existe un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non nul tel que $P(x) = 0$ où $\mathbb{Z}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.

- (1) Montrer que tout rationnel est algébrique mais que la réciproque est fausse.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $E_k = \{P \in \mathbb{Z}[X] \mid \deg(P) \leq k\}$ et $Z_k = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists P \in E_k, P \neq 0 \text{ et } P(x) = 0\}$.
- (2) Montrer que E_k est dénombrable et en déduire que Z_k est dénombrable.
- (3) En déduire que l'ensemble des nombres réels algébriques est dénombrable.

VI. Exemples de parties non dénombrables :

- (1) On souhaite montrer dans cette question que $\mathcal{S} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ (i.e. l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$) n'est pas dénombrable. On suppose par l'absurde qu'il l'est. On peut donc numérotter ses éléments par $\mathbb{N}$: $\mathcal{S} = \{u^0, u^1, u^2, \dots\}$. On définit une suite u par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } (u^n)_n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Conclure.

- (2) Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. Que peut-on dire d'un produit dénombrable d'ensembles dénombrables ?
- (3) On souhaite montrer dans cette question que $[0, 1[$ n'est pas dénombrable. On suppose qu'il l'est. On peut donc numérotter ses éléments par $\mathbb{N}$: $[0, 1[= \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. On utilisant l'écriture décimale propre de chaque x_k , construire un réel x de $[0, 1[$ distinct de tous les x_k . Conclusion ?
- (4) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- (5) Montrer que l'ensemble des irrationnels n'est pas dénombrable.
- (6) Montrer qu'il existe un nombre transcendant (i.e. qui n'est pas algébrique).

VII. Applications de la dénombrabilité :

- (1) Montrer que l'ensemble des suites de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ stationnaires est dénombrable.
- (2) Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle I a un nombre au plus dénombrable de maxima locaux.
- (3) Soit D partie dénombrable de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{R}^2$). Montrer que $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe par arcs.

VIII. Théorème de Baire :

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. On dit qu'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E est une suite de Cauchy si : $\forall \epsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq p, N(x_n - x_m) \leq \epsilon$.

On dit que (E, N) est un espace de Banach si toute suite de Cauchy est convergente. On suppose dans la suite que (E, N) un espace de Banach. Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ouverts denses de E . Montrer que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n$ est dense dans E .

Indication : on pourra construire une suite décroissante de boules $(\bar{B}(x_n, r_n))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{B}(x_n, r_n) \subset \bigcap_{j=0}^n U_j$ et telle que (x_n) soit de Cauchy.

IX. Ensemble des points de continuité d'une fonction :

- (1) Montrer que si une suite de rationnelles $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $|q_n|$ tend vers $+\infty$.
- (2) En déduire un exemple de fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.
- (3) Montrer qu'une fonction monotone sur un intervalle I a un nombre fini ou dénombrable de points de discontinuité.
- (4) Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante ayant une infinité dénombrable de discontinuités.
- (5) Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *strictement* croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est égal à $\mathbb{Q}$.
On cherche plus généralement à caractériser l'ensemble des points de continuité d'une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on définit le diamètre de A , noté $d(A) \in \bar{\mathbb{R}}$:

$$d(A) = \begin{cases} \sup\{|x - y|, (x, y) \in A^2\} & \text{si } A \text{ est bornée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ fonction fixée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons

$$\delta_n(x) = d\left(f\left(\left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]\right)\right) = \sup\left\{|f(y) - f(z)|, (y, z) \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right]^2\right\}$$

- (6) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Expliquer que $(\delta_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 0 et qu'elle admet donc une limite.
On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\omega_f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$.

- (7) Montrer que f est continue en x si et seulement si $\omega_f(x) = 0$.
- (8) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\{x \in \mathbb{R}, \omega_f(x) < \epsilon\}$ est un ouvert.
- (9) En déduire que l'ensemble des points de continuité de la fonction f s'écrit comme l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts (une partie de ce type est appelée un G_δ).
- (10) Réciproquement, soit $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille dénombrable d'ouverts. Notons $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_n$.

On définit la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ \frac{1}{n} & \text{si } x \in \mathbb{Q}, x \notin X, \text{ et } n = \min\{k \in \mathbb{N}^*, x \notin \Omega_k\} \\ -\frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, x \notin X, \text{ et } n = \min\{k \in \mathbb{N}^*, x \notin \Omega_k\} \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des points de continuité est X .

On a montré : **une partie X de $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de continuité d'une fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si X est une intersection dénombrable d'ouverts.** Une intersection dénombrable d'ouverts est appelée un G_δ .

- (11) En utilisant le théorème de Baire, montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ .
- (12) Conclure qu'il n'existe pas de fonction continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

X. Autres applications de la dénombrabilité et du théorème de Baire :

- (1) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ uniformément continue. On suppose que pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Montrer que f a une limite en $+\infty$.
- (2) On suppose désormais f seulement continue. Et de plus, pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
- (3) Montrer que l'espace des fonctions continues $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.
- On souhaite montrer que l'ensemble W des fonctions continues sur $[0, 1]$ et nulle part dérivables et denses dans E .
- (4) On pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \{f \in E, \exists x \in [0, 1], \forall y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq n|x - y|\}.$$

Montrer que F_n est un fermé de E .

- (5) Montrer qu'il est d'intérieur vide (on pourra montrer que son complémentaire est dense en utilisant notamment le théorème de Weierstrass).
- (6) Conclure.