On se place sur le corps $\mathbb{C}$. On identifiera les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$.
Si $M \in \mathfrak{M}_{n,l}(\mathbb{C})$ et $x \in \mathbb{C}^l$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{C}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|$ et pour $M \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, on pose $|||M||| = \sup\limits_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|Mx\|_\infty}{\|x\|_\infty}$, la norme matricielle subordonnée.
Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, on notera $\rho(A) = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$, le rayon spectral de A.

Définition 1 *On dit qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,l]\!]}$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) : pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,l]\!]$, $m_{i,j} \geqslant 0$ (resp. $m_{i,j} > 0$).*
Pour deux matrices M et N de $\mathfrak{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Pour $M \in \mathfrak{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,l]\!]}$, on notera $|M| = (|m_{i,j}|)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,l]\!]}$. On a évidemment $|M| - M \geqslant 0$.

Définition 2 *Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus :*

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1.$$

Définition 3 *On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :*

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0\},$$

$$\Sigma = \{x \in B \mid \|x\|_1 = 1\}.$$

On souhaite montrer dans ce problème différentes formes du théorème de Perron-Frobenius, qui est notamment à la base de l'algortihme PageRank de Google, et qu'on utilise également dans l'étude des chaînes de Markov. La dernière partie, indépendante du reste du problème, nous permet de mieux comprendre les hypothèses faites dans ces théorèmes.

I. Généralités :

(1) Expliquer que ($x \geqslant 0$ et $x \neq 0$) n'est pas équivalent à $x > 0$.

(2) Montrer :
- ▷ qu'une matrice A est positive si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \geqslant 0$, on a $Ax \geqslant 0$;
- ▷ qu'une matrice A est strictement positive si et seulement si pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $x \geqslant 0$ on a $Ax > 0$.

(3) Montrer que pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $|||M||| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)$.

On se fixe désormais une matrice $A \geqslant 0$.

(4) Pour $x \in B$, montrer que $\{\theta \in \mathbb{R}^+ \mid \theta x \leqslant Ax\}$ est un segment de la forme $[0, \theta(x)]$ avec

$$\theta(x) = \min\left\{\frac{(Ax)_i}{x_i} \mid 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } x_i \neq 0\right\}.$$

(5) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

(6) Si $x \in \mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, montrer que $\theta(|x|) \geqslant |\lambda|$.

(7) Montrer que pour tout $x \in B \setminus \mathrm{Ker}\,(A)$, on a $Ax \in B$ et $\theta(Ax) \geqslant \theta(x)$.

(8) Montrer que pour tout $x \in B$, $\theta(x) \leqslant |||A|||$.

(9) Montrer que $\{\theta(x),\ x \in B\} = \{\theta(x),\ x \in \Sigma\}$ et qu'il s'agit d'une partie majorée de $\mathbb{R}_+$.
On note $r(A) = \sup\limits_{x\in\Sigma} \theta(x) = \sup\limits_{x\in B} \theta(x)$.

(10) Montrer que cette borne supérieure est atteinte en un point $x_0 \in \Sigma$.

(11) Expliquer que $\rho(A) \leqslant r(A)$.

(12) On suppose $Ax_0 \neq 0$. Expliquer que $\theta(Ax_0) = \theta(x_0)$.

II. Théorème de Perron-Frobenius version faible :

On souhaite montrer dans cette partie une version faible du théorème de Perron-Frobenius :

Théorème 1 *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement positive. Alors $\rho(A) > 0$, $\rho(A)$ est une valeur propre de A, associée à un vecteur propre $x > 0$. De plus $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de module maximal et $\dim(E_{\rho(A)}(A)) = 1$.*

On se fixe désormais une matrice $A > 0$ et on conserve les notations de la partie précédente. En particulier $x_0 \in \Sigma$ est un point tel que $\theta(x_0) = r(A) = \sup\limits_{x\in B} \theta(x)$.

(1) Montrer que dans ce cas $r > 0$.

(2) Expliquer qu'on a $Ax_0 \geqslant rx_0$. On supppose par l'absurde que $Ax_0 \neq rx_0$ et en déduire alors que $\theta(Ax_0) > r$. Conclure.

On a ainsi montré que x_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre r.

(3) Montrer que $\rho(A) = r > 0$ et que $x_0 > 0$.

(4) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. On considère $x \neq 0$ un vecteur propre associé. On a déjà remarqué que $\rho(A)|x| = |\lambda||x| \leqslant A|x|$. En utilisant une méthode similaire à celle de la question II2, montrer que $\rho(A)$ est valeur propre de A associée au vecteur propre $|x|$.

(5) En déduire que $|x| > 0$, que pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$, $x = e^{i\theta}|x|$, puis que $\lambda = \rho(A)$.

Il nous reste à montrer que $\dim(E_{\rho(A)}(A)) = 1$. On considère donc x_0 et x deux vecteurs de ce sous-espace propre. Avec les notations ci-dessus, $x = e^{i\theta}|x|$.

(6) Démontrer que $|x| \in \mathrm{Vect}(x_0)$. Conclure.

III. Théorème de Perron-Frobenius :

On souhaite démontrer une version plus générale du théorème de Perron-Frobenius.

Théorème 2 *Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive telle que $(I_n+A)^{n-1} > 0$. Alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A associée à un vecteur propre strictement positif x_0. De plus $\rho(A) > 0$ et $\dim(E_{\rho(A)}(A)) = 1$.*

Il n'est par contre en général plus vrai que $\rho(A)$ est l'unique valeur propre de module maximal.

On se fixe $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice positive telle que $P = (\mathrm{I}_n + A)^{n-1} > 0$. On conserve les notations de la partie I. En particulier $x_0 \in \Sigma$ est un point tel que $\theta(x_0) = r = \sup_{x \in B} \theta(x)$.

(1) Montrer que pour tout $x \in B$, $Px \in B$, $\theta(Px) \geqslant \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$.

(2) En utilisant l'idée de la question précédente et celle de la question II2, montrer $Ax_0 = rx_0$.

(3) En déduire $\rho(A) = r > 0$ et que $x_0 > 0$.

(4) Montrer que $\dim(E_{\rho(A)}(A)) = 1$.

IV. Matrices irréductibles :

On cherche dans cette partie à mieux comprendre cette hypothèse fondamentale : $(\mathrm{I}_n + A)^{n-1} > 0$.

Définition 4 *On dit qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible s'il existe une partition de $[\![1,n]\!]$ en $I \cup J = [\![1,n]\!]$ (avec I et J disjointes et non vides) telles que pour tout $(i,j) \in I \times J$, $a_{i,j} = 0$.*

(1) Montrer qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible si et seulement si il existe une partie stricte $K \subset [\![1,n]\!]$ non vide telle que $F_K = \mathrm{Vect}\{e_k,\ k \in K\}$ soit stable par l'application linéaire canoniquement associée à M.

(2) *Matrices de permutation :* On note Σ_n le groupe des permutations de $[\![1,n]\!]$. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, on définit l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ par :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$$

Et on note P_σ la matrice de u_σ dans la base canonique.

a. Pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, déterminer la matrice P_σ (on décrira les éléments $p_{i,j}$ de la matrice). Et expliquer que cette matrice est inversible.

b. Que vaut P_{Id} ? Pour tout $(\sigma,\tau) \in \Sigma_n^2$ que vaut le produit $P_\sigma P_\tau$?

c. Montrer que pour tout $\sigma \in \Sigma_n$, ${}^tP_\sigma = P_{\sigma^{-1}} = (P_\sigma)^{-1}$.

(3) Montrer qu'une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est réductible si et seulement si il existe $\sigma \in \Sigma_n$ telle que $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ soit une matrice par blocs du type $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_s(\mathbb{K})$ avec ($r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$) $r + s = n$.

Définition 5 *On dit qu'une matrice est irréductible si elle n'est pas réductible.*

(4) On suppose que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice carrée irréductible et positive ou nulle.

a. Soit $y \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul positif. Montrer que $z = (\mathrm{I}_n + A)y$ est un vecteur positif avec strictement moins de coordonnées nulles que y.

b. En déduire que $(I + A)^{n-1}y$ est un vecteur strictement positif.

c. Conclure que $(I + A)^{n-1}$ est une matrice strictement positive.

(5) Montrer l'équivalence : A est irréductible si et seulement si $(I + A)^{n-1}$ est une matrice strictement positive.