MP*2 LLG
2025/2026

Programme de colles - Semaine 8 - du 24/11 au 28/11

Topologie des espaces vectoriels normés : le cours est bien avancé, mais nous n'avons pas encore vu la connexité par arcs, nous n'avons étudié aucun des compléments usuels et corrigé encore peu d'exercices. Veuillez svp commencer par des exercices assez proches du cours pour vérifier l'assimilation des définitions et des notions avant d'éventuellement donner des exercices plus élaborés.

Intérieur, adhérience : Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Définitions et caractérisations. Adhérence d'une boule ouverte, intérieur d'une boule fermée. Parties denses dans E, dans X.

Topologie induite : Si X est une partie d'un espace normé, boules, ouverts et fermés relatifs de X. Voisinage relatif. Par définition, une partie U de X est un ouvert relatif si elle est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec un ouvert de E. Définition des fermés relatifs comme complémentaire dans X des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle, caractérisation comme intersection avec X de fermés de E.

Étude locale d'une application, continuité : Limite en un point adhérent à une partie A. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Caractérisation séquentielle. Limite d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Extensions de la définition de limite (avec la définition en termes de voisinage : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle).

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé, par une application continue. Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes. Exemple : l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie de E.

Applications linéaires continues : Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leqslant C\|x\|$. Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$. Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue (de nouveau au programme). Notations $|||u|||$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie (muni d'une norme N_∞, e), toute application linéaire de E vers F est continue. Exemple des applications polynomiales en les coordonnées (*ex :* $Gl_n(\mathbb{K})$ est ouvert et dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Parties compactes d'un espace normé : Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Produit d'une famille finie de compacts. Si E est un espace vectoriel de dimension finie (muni de la norme $N_{\infty,e}$), une partie est compacte si et seulement si elle est fermée-bornée.
Image d'une partie compacte par une application continue. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes. Théorème de Heine.

Espaces vectoriels normés de dimension finie : Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie admet au moins une valeur d'adhérence. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue. Continuité des applications polynomiales.