MP*2 LLG
2025/2026

Programme de colles - Semaine 9 - du 1/12 au 5/12

Topologie des espaces vectoriels normés : exercices sur tout le chapitre. Tout le cours a été vu, ainsi que les compléments usuels, notamment sur Borel-Lebesgue, le processus d'extraction diagonale, les théorèmes de point fixe. Toutefois, le cours sur la connexité par arcs n'a été traité que ce matin. La connexité par arcs ne sera donc au programme qu'à partir de mercredi (le temps de corriger des exercices).

Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé : Chemin continu joignant deux points. Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs. Parties connexes par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image continue d'une partie connexe par arcs. (Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.) Exemples de $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini ou dénombrable de points, de $Gl_n(\mathbb{C})$. Étude des composantes connexes de $Gl_n(\mathbb{R})$. On a un peu parlé de connexité, mais cette notion est hors programme.

Barycentres et convexité : définition, propriétés, enveloppe convexe. Le lemme de Carathéodory a été vu mais doit être redémontré.

Séries dans un espace vectoriel normé de dimension finie : Sommes partielles. Convergence, divergence. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$. Somme et restes d'une série convergente. En cas de convergence, notation $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière. Lien suite-série, séries télescopique. La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature. Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente (on a brièvement parlé d'espaces de Banach mais cette notion est hors programme). Exemples des séries matricielles ($(I_n - A)^{-1}$ quand $\|A\| < 1$, $\exp(A)$). Le critère de Cauchy est hors programme.