Problème 1

Soit $x \in]0,1]$. On souhaite établir qu'il existe une unique suite croissante $(q_n)_n$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2, telle que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} q_j}$.

I. On considère une suite croissante (q_n) d'entiers supérieurs ou égaux à 2. Expliquer que la série $\sum \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} q_j}$ converge.

II. On pose $y_0 = x$ et on définit par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} q_n = \left\lfloor \frac{1}{y_n} \right\rfloor + 1 \\ y_{n+1} = q_n y_n - 1 \end{cases}$

(1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} 0 < & y_n \leq y_{n-1} \\ & q_n \geq 2 \end{cases}$ et que la suite $(q_n)_n$ est croissante.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver l'expression de x en fonction de $q_0, \dots q_n$ et y_{n+1}.

(3) En déduire la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} q_j}$.

III. On suppose qu'il existe une suite croissante (p_n) d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} p_j}$.

On pose alors :

$$\begin{cases} z_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} p_k \right) \cdot \left(x - \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_0 p_1} - \dots - \frac{1}{p_0 p_1 \dots p_{n-1}} \right) \end{cases}.$$

(1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} p_n = \left\lfloor \frac{1}{z_n} \right\rfloor + 1 \\ z_{n+1} = p_n z_n - 1 \end{cases}$

(2) En déduire que l'application $\begin{cases} \mathbf{S} & \to]0,1] \\ (q_n)_{n\in\mathbb{N}} & \to \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=0}^{k} q_j} \end{cases}$ est une bijection, où $\mathbf{S} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites croissantes d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

IV. (1) Avec les notations de la question II, on suppose que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Montrer que x est rationnel.

(2) Réciproquement, on suppose que x est rationnel. On écrit $x = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \exists p_k \in [|1,q|],\ y_k = \frac{p_k}{q}$. En déduire que la suite (q_n) est stationnaire.

(3) Pour quels éléments de $]0,1]$ la suite (q_n) est-elle constante ?

Problème 2 (Fonction de Van der Waerden)

I. On définit une fonction δ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \delta(x) = dist(x, \mathbb{Z}) = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |x - n|.$$

(1) Expliquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\delta(x) = \min(x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x) = \left| x - \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor \right|.$$

(2) Vérifier que δ est 1-périodique, 1-lipschitzienne, et continue sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe représentative de δ.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit une nouvelle fonction sur $\mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\delta_n(x) = \frac{\delta(10^n x)}{10^n}$. Montrer que δ_n est 1-lipschitzienne.

(4) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que δ_n est affine par morceaux (on écrira $\mathbb{R}$ comme union d'intervalles sur chacun desquels δ_n est affine). Quelles sont les pentes ?

(5) Quelle est l'ensemble des valeurs prises par δ_n sur $\mathbb{R}$?

II. On pose $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(x)$.

(1) Montrer que f est bien définie et 1-périodique sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

III. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On souhaite montrer que f n'est pas dérivable en x_0. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_n = \frac{\lfloor 10^n x_0 \rfloor}{10^n}$ et $b_n = \frac{\lfloor 10^n x_0 \rfloor + 1}{10^n}$,

(1) Montrer rapidement que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Quelle est leur limite commune ?

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta_n = \dfrac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n}$. Par l'absurde si f était dérivable en x_0, quelle serait la limite de Δ_n quand n tend vers $+\infty$.

(3) Prouver qu'il existe une suite $(\epsilon_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \epsilon_k$.

(4) Conclure.

IV. Montrer de plus que f n'est monotone sur aucun intervalle.

On a exhibé dans ce problème une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point.