

## Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie (éventuellement égale à 1)

### Continuité

#### Exercice 1

1. Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ , continue, montrer que  $f$  a au moins un point fixe.
2. Qu'en est-il si on ne suppose plus  $f$  continue mais que  $f$  est croissante ?
3. Et si  $f$  est décroissante ?

#### Exercice 2 (X) Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continues en 0 telles que

1.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$ .
2.  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ .

On pourra poser  $g = f - f(0)$  et utiliser la question précédente.

#### Exercice 3 (X)

1. Déterminer les fonctions continues  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = f(x)$ .
2. Que dire d'une fonction continue  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x)$  ?

#### Exercice 4 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ périodique. Montrer que $f$ est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 5 Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, E)$ $2\pi$ -périodiques et 1-périodiques.

#### Exercice 6 (Mines) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq ax + b$ .

#### Exercice 7 (X) Existe-t-il $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ?

#### Exercice 8 (Ulm) Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, (f(x) - f(y)) \left( f(\sqrt{xy}) - f\left(\frac{x + y}{2}\right) \right) = 0$ .

### Convexité

#### Exercice 9 (Mines) Que peut-on dire d'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ ? Trouver un exemple d'une fonction $f$ convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ , majorée et non constante.

#### Exercice 10 (X) Que dire d'une fonction convexe impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ?

#### Exercice 11 (Mines) Soit $(x_j)_{1 \leq j \leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ . Montrer que $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$ et étudier le cas d'égalité.

#### Exercice 12 (Mines) Montrer que, pour tous $x, y, a, b$ réels strictement positifs :

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{a + b}.$$

#### Exercice 13 (X) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ convexe et soit $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$0 \leq \frac{1}{2}f(1) + \sum_{k=2}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f(t) \, dt \leq \frac{1}{8} (f'(n) - f'(1)).$$

#### Exercice 14 (X) Soient $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ , avec $a < b$ , et $f$ une fonction convexe et continue de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$  et étudier les cas d'égalité.
2. Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs distincts. Montrer que 
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x - y}{\ln x - \ln y} \leq \frac{x + y}{2}.$$

3. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . On note respectivement  $M$  et  $m$  le maximum et le minimum de  $f''$  sur  $[a, b]$ .

Montrer que 
$$\frac{m(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M(b-a)^2}{24}.$$

**Exercice 15** (X) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  concave continue telle que  $f(0) = 1$ .

Montrer que 
$$\int_0^1 xf(x) \, dx \leq \frac{2}{3} \left( \int_0^1 f(x) \, dx \right)^2.$$

**Exercice 16** (Ulm) Soit  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$  telle que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . Existe-t-il  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  convexe telle que  $g \geq f$  et  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  ?

### Dérivabilité

**Exercice 17** (Mines) Soit  $f : [0, a] \rightarrow E$ . On suppose que  $f(0) = 0_E$  et  $f$  a pour dérivée à droite  $A$  en 0. On pose pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ . Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

**Exercice 18** (X) Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $f : \mathbb{R} \rightarrow E$  continue en 0. Montrer que  $f$  est dérivable en 0 si et seulement si  $x \mapsto \frac{f(2x) - f(x)}{x}$  possède une limite quand  $x \rightarrow 0$ .

**Exercice 19** (Mines) Soient  $f : ]0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ ,  $\ell_1$  et  $\ell_2$  deux réels tels que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell_1$  et  $xf'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell_2$ . Que vaut  $\ell_2$  ?

**Exercice 20** (Mines) Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f'(x) \geq f(x)^3$ . Montrer que  $f(0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Exercice 21** (Mines) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ . On suppose que  $f$  et  $f''$  sont bornées.

1. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $h > 0$ . Montrer que  $\|f'(x)\| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{h} + \frac{h\|f''\|_\infty}{2}$ .
2. Montrer que  $f'$  est bornée et que  $\|f'\|_\infty^2 \leq 4\|f\|_\infty\|f''\|_\infty$ .

**Exercice 22** (X) Soit  $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  et  $f^{(n)}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

1. Pour tout  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose :  $\phi_p : x \mapsto f(x+p) - \int_x^{x+p} \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (x+p-t)^{n-1} \, dt$ . Montrer que  $\phi_p$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .
2. En déduire que  $f', \dots, f^{(n-1)}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 23** (X) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $f$  est deux fois dérivable, que  $f$  et  $f''$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et que  $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty\|f''\|_\infty}$ .
2. Soit  $r \geq 3$ . On suppose que  $f$  est  $r$  fois dérivable, que  $f$  et  $f^{(r)}$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que, pour  $k \in \{1, \dots, r-1\}$ ,  $f^{(k)}$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  et qu'il existe une constante  $C_k$  indépendante de  $f$  telle que  $\|f^{(k)}\|_\infty \leq C_k \|f\|_\infty^{1-k/r} \|f^{(r)}\|_\infty^{k/r}$ .

**Exercice 24** (X) Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telle que  $f(0) > 0$ ,  $f'(0) > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $x_1$  tel que  $f'(x_1) = 0$ .
2. Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)$  strictement croissante telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(x_n) = 0$ .

**Exercice 25** (X) Soient  $I$  un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  non identiquement nulle et telle que  $|f'| \leq M|f|$ . Montrer que  $f$  ne s'annule pas.

**Exercice 26** (X) Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  telle que  $f' < 0$  et que

$$\sup \left\{ \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} ; x \in \mathbb{R}^+ \right\} < 2.$$

Montrer que  $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 27** (*X*) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^3$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  telle que  $f, f', f'', f'''$  soient à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$  et que  $f''' < f$ . Montrer que  $f''^2 < 2ff'$ ,  $f'^2 < 2ff''$ ,  $f' < 2f$ .

### Intégration

**Exercice 28** Soit  $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ , où  $I$  est un intervalle contenant 0. Soit  $F : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ .

1. Expliquer que  $F$  est dérivable sur  $I \setminus \{0\}$  et exprimer sa dérivée en fonction de  $f$  et  $F$ .
2. Montrer que  $F$  est continue en 0.
3. Dans le cas où  $I$  est symétrique par rapport à 0 et  $f$  est paire (*resp.* impaire), que peut-on dire de la parité de  $F$ .
4. Dans le cas où  $f$  admet un développement limité à l'ordre  $n$  en 0, montrer que  $F$  admet également un développement limité à l'ordre  $n$  en 0 et l'exprimer en fonction de celui de  $f$ .
5. En déduire que si  $f$  est dérivable en 0 alors  $F$  l'est également et donner sa dérivée  $F'(0)$  en fonction de  $f'(0)$ .

**Exercice 29** (*Mines*) Soit  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ .

Montrer que  $\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt \geq \frac{1}{e}$ .

**Exercice 30** (*Centrale*) Soit  $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$  tel que  $f(0) = 0$ . Montrer que  $\int_0^1 f(t)^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 dt$ . CNS d'égalité?

**Exercice 31** Trouver toutes les fonctions  $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$  telles que  $\int_a^b f = (b - a) \sup_{[a, b]} |f|$ .

**Exercice 32**

1. Trouver les fonctions  $f$  continues de  $[a, b]$  (avec  $a < b$ ) dans  $\mathbb{R}$  vérifiant :  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$
2. Même question avec  $f$  continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 33** (*ULSR*) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On pose pour tout  $n \geq 1$  :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

1. Quelle est la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ? Déterminer la vitesse de convergence.
2. On suppose  $f$  1-périodique et de classe  $C^2$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \geq 1, |S_n - \int_0^1 f(t) dt| \leq \frac{C}{n^2}$ .
3. On suppose  $f$  1-périodique et de classe  $C^3$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que :  $\forall n \geq 1, |S_n - \int_0^1 f(t) dt| \leq \frac{C}{n^3}$ .
4. Que dire si  $f$  est 1-périodique et de classe  $C^\infty$ ?

**Exercice 34** (*X*) Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue, strictement croissante telle que  $f(0) = 0$ .

1. On suppose dans cette question que  $f$  est de classe  $C^1$ . Montrer que  $\forall x > 0, \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)$ .
2. Soit  $x > 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $x_{i,n} = \frac{ix}{n}$ . Montrer que  $\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n} (f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \rightarrow \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .
3. Montrer l'égalité vue à la première question.
4. Soient  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $b \in f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue et bijective. Montrer que  $\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \geq ab$ .

**Exercice 35** (*X*) Soient  $b \in \mathbb{R}^{+*}$ ,  $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $b$ -périodique. Montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b f(x) g(nx) dx = \frac{1}{b} \left( \int_0^b f \right) \left( \int_0^b g \right)$ .

**Exercice 36** (*X*) Soit  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ . Montrer que  $\left| \int_a^b f - \frac{(f(a) + f(b))(b-a)}{2} \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$ .

**Exercice 37** (*Cachan, Rennes*) Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $\int_a^b f = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{2} \int_a^b (b-x)(x-a) f''(x) \, dx$ .
2. En déduire l'existence de  $c \in [a, b]$  tel que  $\int_a^b f = (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{12} (b-a)^3 f''(c)$ .
3. Étudier la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$ , où  $y_n = \int_1^n \ln t \, dt - \left( \frac{1}{2} \ln 1 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n \right)$  et en déduire, sans utiliser la formule de Stirling, la forme d'un équivalent de  $n!$ .

**Exercice 38** (*X*) Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

1. Soit  $n \geq 2$ . Montrer  $\frac{f(n-1) + f(n)}{2} = \int_{n-1}^n f + \int_{n-1}^n \left( x - (n-1) - \frac{1}{2} \right) f'(x) \, dx$ .
2. En déduire, quels que soient les entiers naturels  $n > m \geq 1$ , la formule 
$$\sum_{i=m+1}^{n-1} f(i) = \int_m^n f - \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n \left( x - [x] - \frac{1}{2} \right) f'(x) \, dx.$$
3. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{x - [x] - \frac{1}{2}}{x} \, dx = \frac{1}{2} \ln(2\pi) - 1$ .

#### Divers

**Exercice 39** (*X-ULSR*)

1. Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $\forall n, p, u_{n+p} \leq u_n + u_p + C$ , où  $C$  est une constante réelle. Montrer que  $\left( \frac{u_n}{n} \right)$  converge ou tend vers  $-\infty$ .
2. Soit  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  continue et croissante, telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x) + 1$ . On note  $f^n$  la composée itérée de  $f$  ( $n$  fois).

Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\left( \frac{f^n(x) - x}{n} \right)_{n \geq 1}$  converge vers une limite qui ne dépend pas de  $x$ .

**Exercice 40** (*X-ULSR*) Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ . Pour  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , on pose

$$V_a^b(f) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| ; n \in \mathbb{N}^* \text{ et } a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b \right\} \in \overline{\mathbb{R}}. \text{ des réels } \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$$

1. Montrer que  $|f(b) - f(a)| \leq V_a^b(f)$ . Traiter le cas d'égalité.
2. Montrer que, si  $c \in ]a, b[$ ,  $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ . Que vaut  $V_a^b(f)$  dans ce cas ?
4. Montrer qu'il existe  $f$  continue avec  $V_a^b(f) = +\infty$ .  
On pose  $E = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, V_a^b(f) < +\infty\}$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $\|f\| = V_a^b(f) + |f(a)|$ .
5. Montrer que  $(E, \|\cdot\|)$  est un espace vectoriel normé.
6. Si  $f \in E$ , on pose  $N(f) = V_a^b(f) + \|f\|_\infty$ . Les normes  $N$  et  $\|\cdot\|$  sont-elles équivalentes ?
7. Soit  $f \in E$ . Pour  $t \in [a, b]$ , on note  $TV(f, t) = TV(f|_{[a, t]})$ . Soient  $x, y \in [a, b]$  avec  $x < y$ . Montrer que  $|f(y) - f(x)| \leq TV(f, y) - TV(f, x)$ . En déduire que  $f$  peut s'écrire comme différence de deux fonctions croissantes.
8. Étudier la réciproque du résultat établi ci-dessus.

#### Développements asymptotiques

**Exercice 41** (*Centrale*) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $u_n \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ . Étudier la monotonie puis la convergence de cette suite. En donner un développement asymptotique à deux termes.

**Exercice 42** (*Mines*) Soit  $k \in \mathbb{N}$ , montrer que l'équation  $x + \ln(x) = k$  a une unique solution  $x_k \in \mathbb{R}_+^*$ . Donner un développement asymptotique à trois termes de  $(x_k)$ .

**Exercice 43** (*Mines*) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que l'équation  $\tan x = \sqrt{x}$  admet une unique solution  $u_n$  dans l'intervalle  $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$ . Donner un développement asymptotique à quatre termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 44** (*Centrale*) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un unique  $u_n \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $u_n^n - u_n - 1 = 0$ . Étudier la monotonie et la convergence de la suite. Puis donner un développement asymptotique à deux termes de cette suite.

**Exercice 45** (*X-Mines*) Montrer pour  $n \geq 2$  que l'équation  $x = n \ln(x)$  admet exactement deux solutions  $x_n < y_n \in \mathbb{R}_+^*$ . Trouver un équivalent puis un développement asymptotique de  $x_n$ . Puis donner un équivalent de  $y_n$ .