

## Feuille d'exercices : Suites et séries de fonctions

### Convergence de suites de fonctions

**Exercice 1** (CCINP) On choisit  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$  ; étudier la convergence simple de  $(f_n)$ , sa convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$  et sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 2** (IMT)

1. Convergences simple et uniforme de la suite de fonctions  $f_n(x) = \frac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$  sur  $[0, 1]$ .
2. Convergence uniforme de cette suite sur  $[a, 1]$  avec  $0 < a \leq 1$ .

**Exercice 3** (IMT) On pose  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \end{cases}$

1. Étude de la convergence simple de la suite  $(f_n)_n$ .
2. On pose  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ . Calculer  $I_n$ .
3. Quelle la limite de la suite  $(I_n)$  ? La suite  $(f_n)$  converge-t-elle uniformément ?
4. Soit  $a > 0$ . La suite  $(f_n)_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[a, +\infty[$  ?

**Exercice 4** (SR) Montrer que la suite de fonctions de terme général  $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$  converge uniformément sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Exercice 5** (Mines) Une fonction réelle  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie  $f(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ . Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $f_n : x \mapsto f(nx)$ .

**Exercice 6** (Mines) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions

$$f_n : x \mapsto n \left( \arctan \left( x + \frac{1}{n} \right) - \arctan \left( x - \frac{1}{n} \right) \right).$$

**Exercice 7** (X) On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour  $f \in E$ , on pose  $L(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x f$ . Montrer que pour tout  $f \in E$  la suite  $(L^n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0.

**Exercice 8** (Mines) On définit une suite de fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  par récurrence par :

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, 1], P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que cette suite est croissante et converge simplement vers  $x \mapsto \sqrt{x}$ .
2. Puis montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq (\sqrt{x} - P_n(x)) \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)$ .
3. En déduire la convergence uniforme sur  $[0, 1]$
4. En déduire l'existence d'une suite de polynômes qui tend uniformément vers  $x \mapsto |x|$  sur  $[-1, 1]$ .

**Exercice 9** \* (Mines) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

1. Montrer que la suite converge simplement sur  $\mathbb{R}_+$ .
2. Montrer que la suite est croissante.
3. Montrer que la suite converge uniformément sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 10** (*Rennes sur dossier*) Soient  $d, N \in \mathbb{N}$  tels que  $N > d$ . Soient  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes à coefficients réels de degré au plus  $d$  et  $x_1, \dots, x_N$  des réels distincts. On suppose que pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ , la suite  $(P_n(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Montrer que l'on peut extraire de  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers un polynôme de degré au plus  $d$ .

**Exercice 11** (*Centrale*)

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit les fonctions  $h_n$  par  $h_0(x) = 1$  et  $h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$ .

1. Montrer que la suite  $h_n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . Pour  $x \in [0, 1]$ , on pourra utiliser que la fonction  $T_x$ , définie par  $T_x(y) = y - \frac{xy^2}{2}$ , est 1-lipschitzienne sur  $[0, 1]$  et que  $T_x([0, 1]) \subset [0, 1]$ .
2. On étudie l'équation fonctionnelle  $(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2$ . Pour  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = xh(x)$ . À quelle condition sur  $h$ ,  $f$  est-elle solution de  $(E)$  ?
3. Montrer que  $(E)$  admet une solution continue non constante sur  $[0, 1]$ .
4. Puis montrer que  $(E)$  admet une solution continue non constante sur  $\mathbb{R}_+$ .
5. Quelles sont les solutions constantes sur  $\mathbb{R}$  ?

### Convergence de séries de fonctions

**Exercice 12** (*CCINP*) Étudier la convergence simple, normale et uniforme de  $\sum nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

**Exercice 13** (*CCINP*) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On définit sur  $\mathbb{R}_+$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$ . Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions  $(f_n)$ , puis de la série de  $\sum f_n$ .

**Exercice 14** (*CCINP*)

1. Convergences simple et uniforme de la suite de fonctions  $f_n(x) = \cos^n x \sin x$  sur  $[0, \pi]$ .
2. Convergences simple, uniforme et normale de  $\sum f_n(x)$ .

**Exercice 15** (*Mines*) Montrer que  $\sum \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$  converge simplement mais non normalement sur  $\mathbb{R}^+$ . La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}^+$  ?

**Exercice 16** (*CCINP*) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $f_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{n^3}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , qu'elle y est de classe  $\mathcal{C}^1$  et qu'elle est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  (on pourra mener l'étude sur  $[a, +\infty[$  pour tout  $a > 0$ ).

**Exercice 17** (*Centrale*)

1. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité (sur  $\mathbb{R}_+^*$ ) de fonction suivante  $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{n^\alpha}$ .
2. Montrer que  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. Donner une équation différentielle vérifiée par  $f$ .

**Exercice 18** (*CCINP*) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n : x \mapsto \frac{2x}{n^2 + x^2}$ .

1. Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ . On note  $f$  la somme de la série de fonctions  $\sum f_n$ .
2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^0$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pi$ . Ind. On pourra considérer  $t \mapsto \frac{2t}{t^2 + x^2}$ .

**Exercice 19** (*CCINP*) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + n^2 x}$ . On note  $f$  la somme de la série de fonctions  $\sum f_n$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
3. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

4. Donner un équivalent de  $f$  en 0.

**Exercice 20** (IMT) Soit  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n}$ .

1. Montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

2. Sachant que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , en déduire un équivalent de  $S$  en  $+\infty$ .

**Exercice 21** (CCINP) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $f_n(x) = \frac{1}{(n+x)^{\frac{3}{2}} + (n+x)^{\frac{1}{2}}}$ . On note  $f$  la somme de la série de fonctions  $\sum f_n$ .

1. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $] -1, +\infty[$ .

2. Montrer que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, +\infty[$ .

3. Trouver un équivalent de  $f$  en  $-1$  et montrer que  $f$  est intégrable sur  $] -1, 0]$ .

4. Trouver la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

5. Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{x^b}$ .

**Exercice 22** (Mines) Déterminer le domaine de définition et un équivalent simple en  $1^-$  de  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n^2}$ .

**Exercice 23** (Mines)

1. Donner le domaine de définition de  $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$  et étudier sa monotonie et sa continuité.

2. Déterminer limites et équivalents éventuels de  $S(x)$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .

**Exercice 24** (Mines) On pose  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$ .

1. Déterminer le domaine de définition  $D$  de  $f$ .

2. Étudier la continuité de  $f$  sur  $D$ .

3. Déterminer des équivalents de  $f$  aux extrémités de  $D$ .

**Exercice 25** (Mines) On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln \left( \frac{n+1+x}{n+x} \right)$ . Montrer que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Puis, déterminer la limite et un équivalent de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 26** (Centrale)

1. Pour  $x \in \mathbb{R}^{+*}$ , justifier l'existence de  $f(x) = \sum_{n \geq 1} -\ln(1 - e^{-nx})$ .

2. Montrer que la série de fonctions de la question précédente converge uniformément sur tout  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .  
Y a-t-il convergence uniforme sur  $]0, +\infty[$  ?

3. Déterminer un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ , puis un équivalent de  $f$  en 0.

**Exercice 27** (Mines) Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{Arctan}(n+x) - \text{Arctan}(n))$ .

1. Donner le domaine de définition de  $f$ . Étudier sa régularité.

2. Exprimer  $f(x+1)$  en fonction de  $f(x)$  et de  $x$ .

**Exercice 28** (Mines) Domaine de définition et équivalent en  $+\infty$  de  $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^x}{n^2}$ .

**Exercice 29** (Mines) Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ .

1. Montrer que  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

2. Préciser la monotonie de  $f$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

3. Donner un équivalent de  $f$  en 0 et en  $+\infty$ .

**Exercice 30** (*Mines*) Soient  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$  et  $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(nx)}$ .

- Déterminer les domaines de définition de  $f$  et de  $g$ .
- Donner des équivalents de  $f$  et de  $g$  en  $0^+$ .

**Exercice 31** (*Mines*) Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln \left( \frac{n+1+x}{n+x} \right)$ . Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . Trouver un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ . Étudier les variations de  $f$ .

**Exercice 32** (*X-Mines*)\* Soient  $\zeta : x \in ]1, +\infty[ \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$  et  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

- Montrer que  $\zeta$  est définie et continue sur  $]1, +\infty[$ .
- Trouver un équivalent de  $\zeta$  en  $1^+$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n : x \mapsto \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}$ .

- Montrer que  $\sum u_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On pose  $U = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ . Montrer que  $U$  est continue sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

- Étudier la dérivabilité de  $f$ .

- Montrer que, pour  $x \in ]1, +\infty[$ , on a :  $\zeta(x) = \frac{f(x)}{1 - 2^{1-x}}$ .

- Donner un développement asymptotique (à deux termes) de  $\zeta$  au voisinage de  $1^+$ .

- En déduire la valeur de  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ .

- Montrer que la fonction  $x \mapsto \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$  est prolongeable par continuité sur  $]0, +\infty[$ .

- Donner un développement asymptotique de  $\zeta(x)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

- Montrer que  $\zeta$  est convexe et tracer son graphe.

**Exercice 33** (*Mines-Centrale*)\*

- Étudier la convergence sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  de la série de fonctions  $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ . La fonction somme  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ?

- Soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$  par  $g(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ . Montrer que  $h = f - g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , puis qu'elle vérifie pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h\left(\frac{x}{2}\right) + h\left(\frac{x+1}{2}\right) = Ch(x)$  avec  $C > 2$ .

- En déduire que  $f = g$ , puis que  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

**Exercice 34** (*X-SR*)\* Pour  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $g_N : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \mapsto \sum_{n=-N}^N \frac{1}{x+n}$ .

- Montrer que  $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . On note  $g$  sa limite.
- Montrer que  $g$  est continue.
- Montrer que  $g$  est impaire, 1-périodique et vérifie l'équation fonctionnelle :  

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, g(x) = \frac{1}{2} (g(x/2) + g((x+1)/2)).$$
- Montrer que  $g(x) = \pi \cotan(\pi x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ .

**Exercice 35** (*Centrale*)\*

On pose pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $u_n(x) = x \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left( 1 + \frac{x}{n} \right)$ .

- Montrer que la série de fonction  $\sum u_n$  converge simplement.

2. Montrer que  $f : x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  est l'unique fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , convexe, vérifiant  $f(1) = 0$  et  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ .

**Exercice 36**  $(X)^*$  On définit une suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions de  $\mathbb{R}^{+*}$  dans  $\mathbb{R}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_n(x) = \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

1. Montrer que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On note  $\Gamma$  sa limite.
2. Montrer que  $\Gamma > 0$ , que  $\Gamma(1) = 1$ , que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et que  $x \mapsto \ln \Gamma(x)$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
3. Soit  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant les propriétés de la question précédente. Montrer que  $f = \Gamma$ .

**Exercice 37 (SR)** Soit  $a, b$  deux réels tels que  $a \in ]0, 1[$ ,  $b > 1$  et  $ab > 1$ . On pose  $f_{a,b} : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$  et

$$\alpha = -\frac{\ln a}{\ln b}.$$

1. Montrer que  $f_{a,b}$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , bornée et continue.
2. Montrer que  $f_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x)$  pour tout réel  $x$ .
3. Montrer qu'il existe un réel  $C > 0$  tel que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leq C|x - y|^\alpha$ .

**Exercice 38 (ENS)**

1. Montrer que  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit sur  $[0, 1]$ ,  $\phi_n = x \mapsto \int_0^x (1 - g(nt^2)) dt$ . Montrer que  $\phi_n$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et tend uniformément vers 0 sur  $[-1, 1]$ .
3. Soit  $\epsilon > 0$ . Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction  $\psi_p = \psi_{p,\epsilon}, \mathcal{C}^\infty$  sur  $[-1, 1]$ , telle que :

$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, \psi_p^{(k)}(0) = \delta_{k,p} \\ \forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \sup_{x \in [-1, 1]} |\psi_p^{(k)}(x)| \leq \epsilon \end{cases}$$

4. En déduire que pour toute suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , il existe  $f \in \mathcal{C}^\infty([-1, 1], \mathbb{R})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{(n)}(0) = a_n$ .

**Exercice 39 (PLSR)** On admet qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  égale à 1 sur  $[-1/2, 1/2]$  et à 0 en dehors de l'intervalle  $[-1, 1]$ . Soit  $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On cherche  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $f^{(n)}(0) = a_n$ . On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n : x \mapsto \frac{a_n}{n!} x^n \varphi(x)$  et  $f_n : x \mapsto \frac{1}{\lambda_n^n} g_n(\lambda_n x)$ , avec  $\lambda_n \geq 1$  à fixer. Soit  $h = \sum f_n$ . Montrer qu'on peut choisir les  $(\lambda_n)_n$  pour que  $h$  convienne.

**Exercice 40 (PLSR)** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que pour tout  $m, n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,  $|f_n(x) \times f_m(x)| \leq 2^{-|n-m|}$ .

1. Montrer que la série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0, 1]$  et que sa somme est bornée.
2. La convergence est-elle uniforme?

**Exercice 41 (PLSR)** Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $|\lambda_n - n^2| \leq Cn$ . Soit  $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( 1 + \frac{x}{\lambda_n} \right)$ .

1. Montrer que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .
2. Donner un équivalent de  $f(x)$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 42 (Lyon)** Soit  $q \geq 2$  entier. On se donne un caractère non trivial  $\chi$  sur le groupe des inversibles  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$ , c'est-à-dire un morphisme de groupes non constant  $\chi : ((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times) \rightarrow (\mathbb{U}, \times)$ . Pour  $m \in \mathbb{Z}$ , on pose alors  $\tilde{\chi}(m) = 0$  si  $q$  n'est pas premier avec  $m$ , et  $\tilde{\chi}(m) = \chi(\overline{m})$  sinon (où  $\overline{m}$  désigne la classe de  $m$  modulo  $q$ ).

1. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{\chi(m)}{m^s}$  converge si et seulement si  $s > 0$ .

2. Montrer que la fonction  $s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(m)}{m^s}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

**Exercice 43** (*Ulm*) Soient  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , décroissante de limite nulle en  $+\infty$  et

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx).$$

Quelle est la limite de  $g$  en  $0^+$  ?

**Exercice 44** (*X*) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ , soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ , croissante telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$ . On considère les fonctions  $u_n : z \mapsto a_n e^{-\lambda_n z}$  et on s'intéresse à la suite de fonctions  $\sum u_n$ .

- On suppose que  $\sum a_n$  converge. Montrer que la série de fonctions converge uniformément sur tout domaine  $A_C = \{z = x + iy, x > 0, |y| \leq Cx\}$  (où  $C > 0$ ).
- On suppose maintenant que la série de fonctions converge en un point  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Dédurre de la question précédente un domaine sur lequel la série de fonctions converge uniformément.
- On suppose que pour  $x \in [A, +\infty[$ , la série  $\sum u_n(x)$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 0$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = 0$ .

**Exercice 45** (*X*) On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Une suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  est appelée base de type  $S$  lorsque pour tout  $f \in E$  il existe une unique suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n \text{ avec convergence uniforme.}$$

- Montrer qu'il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments deux à deux distincts de  $[0, 1]$  telle que  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , et  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  soit dense dans  $[0, 1]$ .
- Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une base de type  $S$ . Montrer que  $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de type  $S$ .
- Soit  $f \in E$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $F_n$  la fonction de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  qui est continue, affine sur chaque intervalle ouvert inclus dans  $[0, 1] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$ , et coïncide avec  $f$  en  $x_0, \dots, x_n$ . Montrer que  $(F_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
- En déduire l'existence d'une base de type  $S$ .

#### Autour des séries de Fourier

**Exercice 46** *\*(Centrale-X)* Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique. On pose  $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$

pour  $n \in \mathbb{Z}$ , puis  $S_N(f) : x \mapsto \sum_{n=-N}^N c_n(f) e^{inx}$  et  $D_N : x \mapsto \sum_{n=-N}^N e^{inx}$  pour  $N \in \mathbb{N}$ .

- Montrer que  $\int_a^b \phi(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  pour tout  $\phi \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ .
- Montrer que  $S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} D_N(u) du$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
- Montrer que  $D_N(u) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})u}{\sin u}$  pour tout  $u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ .
- Montrer que pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $S_n(f)(t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$ .
- Dans le cas où  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ , montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice 47** (**SR**) On définit la convolée de deux fonctions  $f$  et  $g : f * g : x \mapsto \int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$ . On introduit

$$D_k(t) = \sum_{j=-k}^k e^{ijt} \text{ et } K_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k$$

- Calculer  $K_n * f$ .
- Montrer que  $K_n = \frac{1}{n} \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}$ .

3. Montrer que  $K_n$  est positive. Calculer  $\int_0^{2\pi} K_n$ . Montrer que pour tout  $\delta > 0$ ,  $\int_\delta^{2\pi} K_n \rightarrow 0$ .
4. Montrer que  $(K_n * f)$  converge uniformément vers  $f$ .

**Exercice 48** ( $X$ )

1. Montrer que  $\forall x \in ]0, 2\pi[$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ .
2. Montrer que,  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sup_{x \in ]0, 2\pi[} \sum_{n=1}^N \frac{\sin(nx)}{n} \geq 1$ .

*Théorèmes de convergence uniforme*

**Exercice 49** (*Centrale*)\* Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  qui converge simplement vers  $g$ . On suppose qu'il existe  $k \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est  $k$ -lipschitzienne. Montrer que la convergence est uniforme sur  $[a, b]$ .

**Exercice 50** ( $X$ -Centrale)\* Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions convexes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , qui converge simplement vers une fonction  $f$ .

1. Montrer que  $f$  est convexe.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .
3. On suppose que les  $f_n$  et  $f$  sont dérivables. Montrer que  $(f'_n)$  converge uniformément vers  $f'$  sur tout segment de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 51** (*Centrale*) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $D \subset \mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction  $f$ .

1. On suppose que la convergence est uniforme. Montrer que les fonctions  $f_n$  sont *équi-continues*, c'est à dire :

$$\forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in ]x - \delta, x + \delta[ \cap D, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

2. On suppose que les fonctions sont uniformément équi-continues, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in D, \forall y \in ]x - \delta, x + \delta[ \cap D, |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment.

**Exercice 52** (*Mines*)\*

1. Soit  $E$  un espace métrique. On considère  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de parties compactes non vides. Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$  est non vide.
2. Soit  $X$  une partie compacte de  $E$ , et soit  $(f_n)_n \in (\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ , une suite décroissante de fonctions tendant simplement vers la fonction nulle. Montrer que la suite  $(\|f_n\|_\infty)$  admet une limite réelle, puis que celle-ci est nulle.
3. (*Théorème de Dini*) Soit  $(f_n)_n$  une suite monotone de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , tendant simplement vers une fonction  $g$  continue. Montrer que la convergence est uniforme.

**Exercice 53** (*Mines*)\* (*Théorème de Dini*) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues et croissantes d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant simplement vers une fonction continue  $f$ . Montrer qu'il y a convergence uniforme.

**Exercice 54** ( $SR$ ) \* Soit  $X = [a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . On considère  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. On suppose que  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge uniformément sur  $X$  vers une fonction  $f$ . Montrer que pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $X$  et tout  $x$  de  $X$  tels que  $x_n \rightarrow x$ , on a  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ .
2. On suppose que pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $X$  et tout  $x$  de  $X$  tels que  $x_n \rightarrow x$ , on a  $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ , pour  $f$  fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est continue et que la convergence est uniforme.

*Résultats de densité*

**Exercice 55** ( $IMT$ )\* Pour  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ , soit  $N(f) = \sup \left\{ \left| \int_0^1 f(t)t^n dt \right| ; n \in \mathbb{N} \right\}$ . Montrer que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Exercice 56** (*Mines*)\* On note  $E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ . Montrer la densité dans  $E$  de l'espace des fonctions polynomiales.

**Exercice 57** (*X*) Pour  $x \in ]0, 1[$ , on pose  $\phi(x) = 2x(1-x)$ . On définit par récurrence la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \geq 0}$ , de  $]0, 1[$  vers  $\mathbb{R}$ , par  $\phi_0 = \text{Id}_{]0, 1[}$  et  $\phi_n = \phi \circ \phi_{n-1}$ .

1. Soit  $x \in ]0, 1[$ . Étudier la convergence de la suite  $(\phi_n(x))_{n \geq 0}$ .  
Soit  $I$  un segment inclus dans  $]0, 1[$ .
2. Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  sur  $I$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Établir l'existence d'une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$ , à valeurs dans  $\mathbb{Z}[X]$ , convergeant vers  $f$  uniformément sur  $I$ .

**Exercice 58** (*Mines*)

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $D(t) = t - [t]$ . Déterminer pour  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$  la limite de  $\int_a^b f(t)D(nt) dt$ .

Si  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  que peut-on dire de la limite de  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)D(nt) dt$ .

**Exercice 59** (*X-Mines*)

1. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  croissante. Montrer que  $f$  est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales croissantes.
2. Montrer qu'une fonction continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  est convexe si et seulement si elle est limite uniforme sur  $[0, 1]$  d'une suite de polynômes convexes.

**Exercice 60** (*ENS*)

1. Soient  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  et  $a_1, \dots, a_n$  des points de  $[0, 1]$ . Montrer qu'il existe une suite  $(P_k)$  de polynômes qui converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$  et qui prend les mêmes valeurs que  $f$  aux points  $a_1, \dots, a_n$ .
2. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . On suppose que  $f$  ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur  $[0, 1]$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Existe-t-il  $P \in \mathbb{R}[X]$  ayant les mêmes zéros que  $f$  sur  $[0, 1]$  et tel que  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ ?

**Exercice 61** (*Paris*) Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur  $[-1, 0]$  d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

**Exercice 62** (*X-Mines*)

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = 0$ . Montrer l'existence d'une suite de polynômes  $(P_n)_n$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $P_n(0) = 0$  et qui converge uniformément vers  $f$ .
2. Soit  $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, \mathbb{R}), \lim_{+\infty} f = 0 \right\}$  qu'on munit de  $\|\cdot\|_\infty$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $h_n : \begin{cases} ]0, +\infty[ & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto e^{-nt} \end{cases}$ .  
Montrer que  $\text{Vect}(\{h_n, n \in \mathbb{N}^*\})$  est dense dans  $E$ .
3. (X) Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $k \geq 1$ , montrer qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $|e^{-kx} - e^{-x}P(x)| \leq \varepsilon$ .  
On commencera par  $1 \leq k \leq 2$ .
4. En déduire que les fonctions  $x \mapsto e^{-x}P(x)$ , avec  $P \in \mathbb{R}[X]$  sont denses dans  $E$ .

**Exercice 63** (*SR-X*) Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ . On dit qu'un endomorphisme  $T$  de  $E$  est positif si, pour tout  $f \in E$ ,  $f \geq 0$  implique  $T(f) \geq 0$ . On pose, pour  $i \in \mathbb{N}$ ,  $e_i : x \in [0, 1] \mapsto x^i$ .

1. Soit  $u$  un endomorphisme positif de  $E$ . Montrer que pour tout  $f \in E$ ,  $|u(f)| \leq u(|f|)$ .
2. Soit  $f \in E$ . Montrer que, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que :  $\forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq \epsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}(x - y)^2$ .
3. Soit  $(T_n)_{n \geq 0}$  une suite d'endomorphismes positifs de  $E$ . On suppose que, pour  $i \in \{0, 1, 2\}$ , la suite  $(T_n(e_i))$  converge uniformément vers  $e_i$  sur  $[0, 1]$ . Montrer que, pour tout  $f \in E$ , la suite  $(T_n(f))$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1]$ .
4. Démontrer le théorème de Weierstrass.

## Divers

**Exercice 64** (*PLSR-X*) On note  $F$  l'ensemble des fonctions de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ ,  $C$  l'ensemble des fonctions continues de  $F$ . On note aussi  $I$  (resp.  $S$ ) l'ensemble des fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  telles que, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $\{x \in [0, 1], f(x) \leq a\}$  est fermé (resp. de même avec l'inégalité dans l'autre sens).

Pour  $f \in F$  et  $n \in \mathbb{N}$ , soit

$$L_n(f) : x \in [0, 1] \mapsto \inf_{y \in [0, 1]} (f(y) + n|x - y|) \in [0, 1].$$

1. Montrer que  $S \cap I$  est l'ensemble  $C$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$ .
2. Montrer que  $L_n(f)$  est une suite croissante d'applications continues.
3. (PLSR) Montrer que  $f \in I$  si et seulement si la suite  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$ .
4. (X) Montrer que  $f \in I$  si et seulement si il existe une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions de  $C$  telle que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ .