

Feuille d'exercices : Interversions et intégrales - Intégrale à paramètres

Interversions de limites

Exercice 1 (*Mines-divers*) Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

1. $\int_0^1 \sqrt{1+t^n} \, dt$,
2. $\int_0^1 f(t^n) \, dt$, avec $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$,
3. $n \int_0^1 \ln(1+t^n) \, dt$,
4. $\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{1+x} \, dx$.
5. $\int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n} \, dx$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \, dx$
7. $\int_0^{+\infty} n f(x) e^{-nx} \, dx$, avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ bornée.

Exercice 2 (*IMT*) On pose $J = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \, dx$. Montrer que $J = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(1+k)^2}$.

Exercice 3 (*CCINP*) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^\infty n e^{-x^n} \, dx = \int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y} \, dy$.

Exercice 4 (*Mines*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} \, dt$.

1. Montrer la convergence de I_n .
2. Étudier la convergence et la limite éventuelle de (I_n) .
3. Trouver un équivalent simple de I_n .

Exercice 5 (*Centrale*) On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $f_n : x \mapsto n^2 x e^{-nx}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur $[0, 1]$.
2. Soit g une fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$. Étudier la limite de $\int_0^1 g(t) f_n(t) \, dt$.

Exercice 6 (*X-MPI*) Déterminer la limite de la suite de terme général :

1. $u_n = n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) \, dt$ (aussi Mines)
2. $u_n = \int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{\sin t} \, dt$, avec $r \in]0, \pi[$.

Exercice 7 (*IMT*)

1. La fonction $f(t) = \frac{\ln^2 t}{1+t^2}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?
2. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} f(t) \, dt = 2 \int_0^1 f(t) \, dt = 2 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 8 (*X*) Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} \, dt$.

Exercice 9 (*ENTPE-EIVP*) Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} - e^{-x}} \, dx$.

Exercice 10 (*Mines -ENSEA-ENSIIE*) Montrer, pour $x > 1$: $\zeta(x) \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} \, dt$.

Exercice 11 (*Mines*) Montrer que $\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \, dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$.

Exercice 12 (*Mines/CCINP*) Prouver l'égalité $\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Exercice 13 (*Mines*) Montrer que $\int_0^{+\infty} \ln(\tanh(x)) dx = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Exercice 14 (*Mines*)

1. Soient a et b dans $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 15 (*Mines*) Calculer $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$.

Exercice 16 (*Mines*) Exprimer sous forme de somme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(t) dt$.

Exercice 17 (*Mines*)

1. Justifier que $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_{1/2}^1 \frac{\ln t}{1-t} dt$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 18 (*Mines*)

1. Ensemble de définition et limites aux bornes de $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$.
2. Montrer que $F(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2 x^2 - 1}$.
3. On note l la limite en $+\infty$ de F ; donner un équivalent de $l - F(x)$ en $+\infty$.

Exercice 19 (*Mines*) Soit $x > 0$. Développer $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1-e^{xt}} dt$ en série de fonctions rationnelles.
En déduire un équivalent de S en 0^+ .

Exercice 20 (*Mines*) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+|x|} f(x-n) dx$. Étudier la convergence de $(I_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 21 (*Mines*) Pour $n \geq 2$, on pose $I_n = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n} dx$. Trouver un équivalent de I_n .

Exercice 22 (*Mines*) Pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

1. Montrer que $I_n(\alpha)$ est bien définie.
2. Déterminer une relation de récurrence entre $I_{n+1}(\alpha)$ et $I_n(\alpha)$; en déduire une expression de $I_n(\alpha)$.
3. Montrer que la suite $(I_n(\alpha))$ converge et trouver sa limite.
4. Montrer qu'il existe $K(\alpha) > 0$ tel que $I_n(\alpha) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K(\alpha)}{n^{1/\alpha}}$.

Exercice 23 (*Mines*)

1. Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{x-1}$. Montrer que f peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On notera encore f le prolongement ainsi obtenu.
2. Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ converge vers 0. Trouver un équivalent de I_n .

3. Montrer que $n \int_0^1 x^n f(x^n) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 24 (*X*) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx$, puis $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(\cos \frac{x}{n}\right)^{n^2} dx$.

Exercice 25 (*Lyon*) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\int_0^1 |f_n|$ tend vers $\int_0^1 |f|$ quand n tend vers $+\infty$ alors $\int_0^1 |f_n - f|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
2. Montrer que si $\int_0^1 f_n^2$ tend vers $\int_0^1 f^2$ quand n tend vers $+\infty$ alors $\int_0^1 (f_n - f)^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 26 (*Lyon*)* Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.

1. Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} P'(e^{it})}{P(e^{it})} dt$.
2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

Exercice 27 (*X*)* Si $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $N_r(P)$ le nombre de racines de P de module au plus r comptées avec multiplicités. On admet dans les deux premières questions le résultat suivant : si P et Q sont dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C}[X]$ respectivement, si $r \in \mathbb{R}^{+*}$ est tel que, pour tout $x \in \mathbb{C}$ de module r , $|Q(x)| < |P(x)|$, alors $N_r(P + Q) = N_r(P)$.

1. Dédire de l'énoncé admis le théorème de d'Alembert-Gauss.
2. Soient $r \in \mathbb{R}^{+*}$, $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ ne s'annulant pas sur le cercle de centre 0 et de rayon r . Montrer que $N_r(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P'(re^{it})}{P(re^{it})} re^{it} dt$, sans utiliser le théorème de d'Alembert-Gauss.
3. Dédire de la question précédente le résultat admis en début d'énoncé.
4. Pour toute fraction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X)$ et tout réel tel que f n'ait ni zéro ni pôle de module r on pose $N_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} re^{it} dt$. Prouver que, lorsque $N_r(f)$ est bien défini, il est égal au nombre de zéros de f dans le disque $D_0(r)$ diminué du nombre de pôles de f dans le disque $D_0(r)$ (les deux étant comptés avec multiplicité).

Exercice 28 (*X*) On pose $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Pour $y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_y : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{y} g(x/y)$. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue, nulle en dehors d'un segment.

1. Montrer que, pour tout réel x , la fonction $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g_y(t) dt$ tend vers $f(x)$ en 0^+ .
2. Montrer plus précisément que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que $\left| \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g_y(t) dt - f(x) \right| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0, \delta]$.

Exercice 29 (*ULCR*) On pose $\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(p^k) = \ln(p)$ pour tout nombre premier p et $k \in \mathbb{N}^*$ et 0 sinon. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
2. Montrer que pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que pour tout $s > 1$, $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} = \frac{1}{s-1} + O_{s \rightarrow 1^+}(1)$.
4. Montrer que pour tout $s > 1$, $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p^s} = \ln \left(\frac{1}{s-1} \right) + O_{s \rightarrow 1^+}(1)$. Qu'en déduire ?

Intégrales à paramètres

Exercice 30 (*Mines*) Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$. Étudier F puis calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan^2(t)}{t^2} dt$.

Exercice 31 (*X-Mines*)

1. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt) dt$ pour tout réel x .
2. On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$\forall x > 0, \quad F''(x) = F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

3. Donner une expression simplifiée de F .

Exercice 32 (*X*)

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$.
3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

Exercice 33 (*Mines*) On fixe $a \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \cos(2tx) dt$. Trouver une équation différentielle vérifiée par F et déterminer F .
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-at^2} \sin(2tx) dt$. Montrer que $G(x) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x^2}{a}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{a}} dt$.
3. Trouver la limite de $G(x)$ puis celle de $xG(x)$ en $+\infty$.

Exercice 34 (*Mines*)

1. Domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+x} dt$.
2. Justifier la dérivabilité de f et exprimer $f'(x)$ (sans intégrale).
3. On pose pour $x > 0$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer g .

Exercice 35 (*Mines*) Soit $g : x \in]-1, +\infty[\mapsto \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$.

1. Justifier la définition de g .
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer g' . Puis calculer g .

Exercice 36 (*ENSEA-ENSIIE*)

1. Montrer que $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} e^{-t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Établir une équation différentielle vérifiée par F puis exprimer F simplement.

Exercice 37 (*SR*) Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu^2}}{1+u^2} du$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Quelle est la limite de F en $+\infty$?
4. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Exercice 38 (*Mines-SR*)* On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ converge.
- On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t^2+i)x^2}}{t^2+i} dt$.

2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} e^{-ix^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + i}$.

4. En déduire la valeur de I .

Exercice 39 (*X MPI*) Calculer $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ixt}}{1+t^2} dt$.

Exercice 40 (*X*) Soit $t > 0$. Pour $p \in \mathbb{R}$, on pose $F_c(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \cos(px^2) dx$,

$$F_s(p) = \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} \sin(px^2) dx \text{ et } Z = F_c + iF_s.$$

1. Montrer que Z est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation différentielle du premier ordre satisfaite par F .

3. En déduire F_c et F_s .

Exercice 41 (*Mines*) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et exprimer sa dérivée.

2. On pose $g(x) = f(x^2)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ est constante, et préciser sa valeur.

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 42 (*Mines*) Pour tout réel $a > 0$, on pose $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \arctan(ax)}{1+x^2} dx$. Justifier l'existence de $F(a)$, puis calculer cette intégrale.

Exercice 43 (*Mines*) On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Domaine de définition de F ? de continuité?

2. Donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 44 (*Mines*) On pose $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{x^2}{t^2}} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

3. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F .

4. En déduire F .

Exercice 45 (*Mines*) Domaine de définition, continuité et équivalents aux bornes de $f : x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^x}}$.

Exercice 46 (*Mines*) Pour $x > 0$, on pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2+t^2)}} dt$.

1. Justifier que I est bien définie.

2. Trouver la limite de $I(x)$ quand x tend vers 0_+ .

3. Trouver un équivalent quand x tend vers 0_+ .

Exercice 47 (*X*) Déterminer un équivalent en 1^- de $x \mapsto \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-xt^2)}} dt$.

Exercice 48 (*Mines*) Limite et équivalent simple en 0^+ de $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

Exercice 49 (*X*) Soit $I : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x} dt$. Trouver un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers 0_+ .

Exercice 50 (*Mines*) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} dt$.

1. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, |e^{iu} - 1| \leq |u|$.
2. Montrer que f est dérivable et en déduire une expression de f .

Exercice 51 (*Mines*) Soit $f : x \mapsto \int_0^1 e^{xu \ln(u)} du$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Soit g une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0. Montrer que $\int_0^{+\infty} x g(u) e^{-xu} du$ tend vers $g(0)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
Que peut-on dire si g est supposée intégrable au lieu de bornée ?
3. Déterminer la limite de $xf(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 52 (*SR*) Pour $x > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on pose : $F_{\alpha, \beta}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^\alpha (1+t)^\beta dt$.

1. Pour quels (α, β) l'intégrale $F_{\alpha, \beta}(x)$ converge-t-elle absolument ?
2. Pour un tel couple (α, β) , étudier la régularité de $F_{\alpha, \beta}$.
3. On pose $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $g : x \in]0, 1[\mapsto \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$. Exprimer f et g en fonction des $F_{\alpha, \beta}$.
4. Déterminer un développement asymptotique de $F_{\alpha, \beta}$ en $+\infty$.

Exercice 53 (*Mines-X*) Montrer que pour tout réel x , $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt = \pi e^{-|x|}$.

Exercice 54 (*X*) Soit $\mathcal{K}$ (resp. $\mathcal{K}_c$) l'espace des fonctions continues (resp. continues par morceaux) à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit τ_x l'endomorphisme de $\mathcal{K}$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{K}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \tau_x(f)(t) = f(t-x).$$

1. Pour $f \in \mathcal{K}$ et $g \in \mathcal{K}_c$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt.$$

Montrer que $f * g$ appartient à $\mathcal{K}$.

2. Soit T un endomorphisme de $\mathcal{K}$ commutant à τ_x pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tel que

$$\forall f \in \mathcal{K}, \quad \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Montrer que

$$\forall (f, g) \in \mathcal{K} \times \mathcal{K}_c, \quad T(f * g) = T(f) * g.$$

Exercice 55 (*X*) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue à droite et de carré intégrable. On pose pour $x > 0$, $S_f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy$.

1. Justifier la bonne définition de S_f .
2. Montrer que S_f est de carré intégrable.

Autour de la fonction Gamma

Exercice 56 (*ENS*) On pose $\Gamma : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \int_{\mathbb{R}^{+*}} t^{x-1} e^{-t} dt$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\forall y \in]0, 1[, \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} < x^y$ et $\forall y \in [1, +\infty[, \frac{\Gamma(x+y)}{\Gamma(x)} \geq x^y$.

Exercice 57 (*X-Centrale*) On définit les fonctions Γ , de $\mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, et B , de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ vers $\mathbb{R}$, par les égalités $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ et $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

1. Justifier la définition de Γ et de B .
2. Exprimer $B(x+1, y)$ puis $B(x+1, y+1)$ en fonction de $B(x, y)$.

On souhaite montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3. Expliquer pourquoi il suffit de le montrer pour $x > 1$ et $y > 1$.

On pose $x > 1$ et $y > 1$. On note $F_{x,y}$ la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ qui s'annule en 0, et $G(z) = \int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} F_{x,y}((1+u)z) \, du$.

4. Montrer que $\lim_{z \rightarrow +\infty} G(z) = \Gamma(x+y)\beta(x,y)$.

5. Montrer que G est $\mathcal{C}^1$, et en déduire une expression de $\lim_{z \rightarrow +\infty} G(z)$. Conclure.

6. Calculer $\int_0^1 \frac{(1-t)^{x-1} - 1}{t} \, dt$ pour $x > 0$. Ind. Écrire $B(x,y) - \frac{1}{y}$ sous forme intégrale.

Exercice 58 (X)

1. Soit $t > 0$. Montrer que l'application $f_t : s \in]t, +\infty[\mapsto \left(1 - \frac{t}{s}\right)^s$ est croissante.

2. Soit Γ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par l'égalité $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} \, dt$.

Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

3. Montrer que $\forall x > 0, \Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 59 (PLSR) Soit $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \Gamma(1/2)$.

2. Montrer que, pour $x, y > 0$ et $\lambda \in [0, 1]$, $\Gamma((1-\lambda)x + \lambda y) \leq \Gamma(x)^{1-\lambda} \Gamma(y)^\lambda$.

3. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma(n + 1/2)^2 \leq \Gamma(n) \Gamma(n + 1) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n + 1)^2 \leq \Gamma(n + 1/2) \Gamma(n + 3/2).$$

4. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

5. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, dt$. Démontrer que la suite $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers Γ .

Exercice 60 (X)

1. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n - \ln n$ tend vers une limite $\gamma > 0$.

2. Pour $t \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{t-1} \, dx$. Montrer que Γ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} \, dx = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\int_y^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} \, dx + \ln y \right)$.

3. En déduire que $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 - e^{-x}} \right) \, dx = -\gamma$.