

Programme de colles - Semaine 12 - du 12/1 au 16/1

Suites et séries de fonctions : exercices de révisions sur tout le chapitre.

Intégration :

Théorème de convergence dominée : Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n . Alors : $\int_I f_n \rightarrow \int_I f$. Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t . Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème d'intégration terme à terme : Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I , alors, dans $[0, +\infty]$, $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt$. En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt < +\infty$.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

Intégrale à paramètres :

Continuité d'une intégrale à paramètre : Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est définie et continue sur A . Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A . Si A est un intervalle de $\mathbb{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A .

Dérivation d'une intégrale à paramètre : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable, que, pour tout x de J , $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I , que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la seconde variable. On suppose de plus qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de J , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$. Alors

$$g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J et vérifie :

$$\forall x \in J, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de J .

Classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse d'intégrabilité de $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, .)$ pour tout x de J si $0 \leq j \leq k-1$ et domination sur tout segment de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, .)$.

Étude de la régularité et étude asymptotique de fonctions définies par des intégrales.

Belle et heureuse année 2026 !