

Feuille d'exercices : Séries entières

Rayons de convergence

Exercice 1 (CCP) Calculer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ où :

1. $a_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$
2. $a_n = \sum_{d|n} d^3$
3. $a_n = \frac{n^n}{n!}$
4. $a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^{-\alpha}}$

Exercice 2 (Mines-Centrale-X) On suppose que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R > 0$. Quel est le rayon de convergence de

1. $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$
2. $\sum (-1)^n a_n x^n$
3. $\sum a_n^2 x^n$
4. $\sum a_n x^{n^2}$.

Exercice 3 (Mines) Soient $(a_n) \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\left| \frac{a_{n+k}}{a_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}^+$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Exercice 4 (Mines) Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \left(\frac{1}{\alpha} \sin n + \alpha \sin \frac{1}{n} \right)^n$.

1. Étudier la nature de la série $\sum a_n$.
2. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?

Exercice 5 (X) Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \frac{1}{\sin(n\pi\sqrt{2})} x^n$.

Exercice 6 (ENS) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite à valeurs réelles non nulles. Pour tout entier non nul N , on pose $P_N = \sum_{k=0}^N a_k X^k$, et on suppose que chacun des P_N est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. On cherche à montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $+\infty$.

1. Montrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $N \geq 2$, $M = \sum_{\lambda \in P_N^{-1}(\{0\})} \frac{1}{\lambda^2}$.
2. Établir l'existence de $C > 0$ tel que $\forall N \geq 2$, $a_N^2 \leq \frac{C}{N^2} (a_{N-1}^2 - 2a_N a_{N-2})$.
3. Montrer le résultat annoncé.

Exercice 7 (Mines) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \nu_2(n)$ (valuation 2-adique).

1. Déterminer les valeurs d'adhérence de (a_n) .
2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)$. La suite (b_n) possède-t-elle une limite ?
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$.

Calculs de sommes

Exercice 8 (CCINP)*

1. Calculer le rayon de la série entière $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$ et exprimer sa somme.
2. Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (CCP-TPE-Mines) Calculer le rayon de convergence et donner une expression de la somme de

1. $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(k+1)(k+2)}{2^k} x^k.$
2. $\sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{n^2 - 1}.$
3. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$
4. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{(2n+1)}.$
5. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{3n+1}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{3n+2}.$

Exercice 10 (*Mines*)*

1. Soit $s \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=s}^{+\infty} \binom{n}{s} x^n.$
2. Calculer sa somme $S(x)$ sur son disque de convergence.

Exercice 11 (*Mines*) On pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt \, dt.$

1. Calculer a_0, a_1, a_2 et $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ pour $x \in]-1, 1[.$
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière.

Exercice 12 (*Centrale*) Calculer le rayon de convergence et la somme de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n(2n+1)}.$ Calculer $f(1)$ et $f(-1).$

Exercice 13 (*X*)* Montrer que, pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}, \ln |1 - re^{i\theta}| = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta).$

Exercice 14 (*Mines*) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \frac{x^n}{n}.$

Exercice 15 (*Mines*) Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n.$

Exercice 16 (*Mines*) Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, nt \notin 2\pi\mathbb{Z}.$ Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} x^n.$

1. Déterminer le rayon de convergence R de $f.$
2. Étudier la convergence en $\pm R.$ Ind. Poser $S_n = \sum_{k=1}^n \sin(kt).$
3. Exprimer $f(x)$ pour $x \in]-R, R[.$

Exercice 17 (*X*)* Montrer que, pour tous $r \in [0, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}, \ln |1 - re^{i\theta}| = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta).$

Intégrales et séries entières

Exercice 18 (*SR*) Pour $x \in [-1, 1[$, on pose $L(x) = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt.$

1. Justifier la bonne définition de L sur $[-1, 1[$ et montrer que L est prolongeable par continuité en 1.
2. Déterminer le développement en série entière de L en 0 et préciser son rayon de convergence.
3. Calculer $L(1).$
4. Exprimer à l'aide de L la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}.$
5. Exprimer $L(x) + L(-x).$ Qu'en déduire ?

Exercice 19 (*Mines*)* Pour $n \in \mathbb{N},$ soit $I_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^n \, dx.$

1. Montrer que I_n tend vers 0.
2. Trouver une relation de récurrence, et en déduire un équivalent de $I_n.$
3. Donner le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$ et calculer la somme pour $x \in]-R, R[.$

4. Étudier la convergence de $\sum I_n x^n$ pour $x = R$ et $x = -R$.
5. Montrer que $I_{2n} = (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Et exprimer de même I_{2n+1} .

Exercice 20 (*Mines-Ponts*) Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2} dt$.

1. Domaine de définition ?
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. F est-elle développable en série entière ?

Exercice 21 (*Centrale*) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

1. Nature de $\sum (-1)^n a_n$.
2. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
3. Calculer la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.
4. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

Exercice 22 (*Centrale*) On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n x^n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$, et on note, quand elle est définie, $f(x)$ la somme.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Montrer que $a_n = \int_0^{+\infty} e^{-nt} t^n dt$.
3. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.
4. Étudier la convergence en $x = R$ et $x = -R$.
5. Étudier les variations de f sur $] -R, R[$.
6. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n = \int_0^\infty \frac{te^{-t}}{(1-te^{-t})^2} dt$.

Exercice 23 (*Mines*)* Soit $(a_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ une suite bornée. On note $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x)$ est bien défini, et que g est défini sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x > 1$, $\int_0^\infty e^{-tx} g(t) dt$ converge et vaut $\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Équations différentielles et séries entières

Exercice 24 (*CCINP*)* On pose $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin(x)$.

1. Domaine de définition ?
2. Vérifier que f est solution qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre.
3. Trouver le développement en série entière de f et donner son rayon.

Exercice 25 (*IMT*)

1. La fonction $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ est-elle développable en série entière ?
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$
3. Déterminer le développement en série entière de f .

Exercice 26 (*Centrale*)* Soit $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2. En déduire le développement en série entière en 0 de f .

Exercice 27 (*Mines*)* Soit $f : x \mapsto (\arcsin(x))^2$.

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, sur un intervalle que l'on précisera.
2. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Exprimer les coefficients de ce développement en série entière et donner son rayon de convergence.

Exercice 28 (*Mines*) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2^n n!)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition réel de f .
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
3. Soit $x > 1$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 29 (*Mines*) Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ définie par $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$ et $a_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i+j=n} a_i a_j$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de l'équation $xy'' - x = y^2$ sur $]0, 1[$.

Exercice 30 (*Mines*) Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$. En déduire le rayon R de $f(x) = \sum a_n x^n$.
2. Montrer que f est solution de $(1-x)y' - (2x+1)y = 0$. Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Séries génératrices et séries entières

Exercice 31 (*IMT*)* On définit : $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et pour tout $n \geq 1$ $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

1. Montrer que pour tout $n > 1$, $d_n \in \left[\frac{n!}{3}, n! \right]$.
2. En déduire le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par S et calculer S . En déduire une expression de d_n .

Exercice 32 (*Mines*)* Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(t)^n \sin(nt) dt$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Calculer a_0, a_1, a_2 .
2. Calculer $f(x)$ pour $|x| < 1$. Préciser le rayon de convergence de f .
3. En déduire a_n .

Exercice 33 (*Mines*) On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$ pour tout n . Trouver u_n en considérant la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{u_n}{n!} x^n$.

Exercice 34 (*PLSR*)* Soient $p \geq 2$ et $q \geq 2$ deux entiers tels que $p \wedge q = 1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on pose $f(z) = \frac{1 - z^{pq}}{(1 - z^p)(1 - z^q)}$. Écrire $f(z)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ et trouver le plus grand $n \geq 0$ tel que $c_n = 0$.

Exercice 35 (*PLSR*)* On pose $p(n) = |\{(k_1, \dots, k_N) \in (\mathbb{N}^*)^N ; N \in \mathbb{N}^*, k_1 + \dots + k_N = n\}|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $p(0) = 1$. Montrer que, pour $|z| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) z^n = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^k}$.

Exercice 36 (*Mines-X*)* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $p(n)$ le nombre de triplets $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x + 2y + 3z = n$. On pose $G : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p(n) t^n$.

1. Montrer que $G(t)$ est défini pour $|t| < 1$ puis que $G(t) = \frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.

2. En déduire $p(n)$ et un équivalent lorsque $n \rightarrow +\infty$.
3. Généraliser avec le nombre de m -uplets $(x_1, \dots, x_m)$ tels que $x_1 + 2x_2 + \dots + mx_m = n$.

Exercice 37 (*Lyon-X-Centrale*)* On appelle involution un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma^2 = \text{Id}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $p_n = \frac{I_n}{n!}$. On pose $p_0 = 1$ et $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$.

1. Trouver une relation de récurrence entre les (I_n) .
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et calculer $f(x)$. Donner le rayon de convergence de la série entière.
3. Trouver une expression de I_n .
4. Montrer que $p_n \geq \frac{1}{\sqrt{n!}}$.

Exercice 38 (*X*) * On se donne $2n$ points distincts sur le cercle unité, que l'on relie par n cordes qui ne se coupent pas. On note C_n le nombre de façons de tracer ces cordes. Par convention, $C_0 = 1$.

1. Montrer que $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$.
2. Soit $f : x \mapsto \sum C_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est > 0 . Donner une expression de f au voisinage de zéro.
3. Déterminer C_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que C_n est aussi égal au nombre de chemins croissants de $\mathbb{N}^2$ allant de $(0, 0)$ à (n, n) en restant sous la diagonale.

Exercice 39 (*Lyon*) Si $n \in \mathbb{N}$, une permutation de $\{1, \dots, 2n+1\}$ est dite zigzagante si, pour tout $k \in \{2, \dots, 2n\}$, $(\sigma(k+1) - \sigma(k))(\sigma(k) - \sigma(k-1)) < 0$. On note T_n le nombre de permutations zigzagantes de $\{1, \dots, 2n+1\}$. Déterminer la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

Exercice 40 (*X*) Soit $(L_n)_{n \geq 0}$ définie par $L_0 = L_1 = 1$ et, si $n \geq 1$, $L_{n+1} = (n+1)L_n - \binom{n}{2}L_{n-2}$, avec $L_{-1} = 0$. On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est strictement positif.
2. Montrer que $\frac{L_n}{n!} \rightarrow 0$.
3. Déterminer f . *Ind.* Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
4. En déduire un équivalent de $\frac{L_n}{n!}$.

Comportements sur le bord

Exercice 41 (*Mines*) On considère la suite définie par $a_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
2. Quelle est la limite de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. En déduire un équivalent de a_n .
3. Étudier la convergence de la série en $\pm R$.
4. Donner un équivalent de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ lorsque x tend vers R^- .

Exercice 42 (*Centrale*) On considère la suite définie par $a_0 \in]0, \pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
2. Étudier la convergence de la série aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 43 (*Mines*)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan x = x$ admet une unique solution $a_n \in \left] n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} \right[$.

2. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$.
3. On note $f(x)$ la somme de cette série. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers R .
4. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de a_n .

Exercice 44 (*Mines*) Soit $F : x \in [0, 1] \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. Montrer que F est continue et déterminer un équivalent de $F(1) - F(x)$ lorsque $x \rightarrow 1$. Étudier de deux façons la dérivabilité de F en 1.

Exercice 45 (*Mines*)

1. Soit (a_n) une suite réelle telle que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Que dire de la suite (a_n) si elle est monotone ?
2. Trouver le rayon de convergence R de la série $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$.
3. On pose $S(x) = \sum_{k \geq 0} a_k x^k$; trouver $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)S(x)$

Exercice 46 (*Mines*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $a_n = (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

1. Convergence et somme de $\sum a_n$.
2. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum a_n x^n$ et étudier la somme lorsque x tend vers R^- .

Exercice 47 (*Mines*)* Si $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on dit que $\sum u_n$ converge au sens d'Abel si $\sum u_n x^n$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow 1^-$; cette limite est la somme au sens d'Abel de la série.

1. On suppose $(u_n)_{n \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si elle converge au sens d'Abel ; comparer alors les deux sommes.
2. Montrer qu'une série convergente est convergente au sens d'Abel, et que sa somme au sens d'Abel est alors égale à sa somme ordinaire.
3. Qu'en est-il de la réciproque ?
4. Étudier la convergence au sens d'Abel de $\sum u_n$ si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n (n+1)$.

Exercice 48 (*Centrale*) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note t_n le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de n et s_n la somme de ses chiffres. Par exemple $t_{1004270} = 1$ et $t_{1004270} = 14$.

On note $T(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} t_n z^n$, $S(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} s_n z^n$.

1. Étudier la parité de T .
2. Déterminer le rayon de convergence de T et de S .
3. On considère dans cette question S comme fonction d'une variable réelle. Quelle est sa limite en 1^- ?
4. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, $(1-z)S(z) = -9T(z) + \frac{z}{1-z}$.
5. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$, $T(z) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{10^p}}{1-z^{10^p}}$.
6. On considère de nouveau S comme fonction d'une variable réelle. Quelle est sa limite en -1^+ ?

Exercice 49 (*Centrale*) Soit $(b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique. À quelle condition la série entière $\sum b_n x^n$ admet-elle une limite en 1_- ?

Exercice 50 (*X*)*

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \ln(n)x^n$, dont on note $g(x)$ la somme.
2. Déterminer un équivalent de g en 1^- .
3. Déterminer la limite de g en -1^+ .

Exercice 51 (*X*)* Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle telle que $\sum a_n x^n$ soit de rayon 1. Pour $x \in]-1, 1[$, soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. On suppose que $\sum a_n$ converge. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
2. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que $f(x)$ admette une limite finie quand x tend vers 1^- et que $\sum a_n$ diverge.
3. On suppose que les a_n sont dans $\mathbb{R}^+$ et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.
4. On suppose que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(1/n)$ et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \ell$.

Exercice 52 $(X)^*$

1. Soit $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{+\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_k$ diverge et que $\sum a_k x^k$ ait pour rayon de convergence 1. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$.
2. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \sim \ln(n)$. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{1-x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$.

Exercice 53 (SR) Soit a une suite réelle convergeant vers un réel $\ell \neq 0$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n} z^n$.
2. Déterminer la limite, quand t tend vers 1^- , de $\frac{1}{\ln(1-t)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} t^n$.
3. On pose $b_n := \sum_{k=1}^n a_k$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} z^n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n!} z^n$. On note G et H leurs sommes respectives.
4. Exprimer G' à l'aide de H et H' .
5. Exprimer $\int_0^{+\infty} G(x) e^{-x} dx$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 54 $(Mines)$ Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$.

1. Quel est le rayon de convergence de f ?
2. Déterminer la limite en 1^- de f puis de $x \mapsto (1-x)f(x)$.

Exercice 55 (X) Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.

1. Montrer que f est définie sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que $(1-t)f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 1^-$.

Exercice 56 (Ulm) Trouver la limite lorsque $x \rightarrow 1^-$ de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n^2}$.

Développements en séries entières et analytité

Exercice 57 $(Centrale)$

1. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$.
2. Calculer $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ à l'aide d'un développement de Taylor avec reste intégral de $\ln(1+x)$, entre 0 et 1.
3. Pour $t > 1$, on pose $\zeta(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^t}$; développer f en série entière au voisinage de 0 à l'aide de ζ et préciser le rayon de convergence de la série.

Exercice 58 (Centrale) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que $\sum_{n \geq 1} |a_n|^2$ converge.

1. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-x}$ est bien définie et continue sur $] -1, 1[$.
2. Montrer que S est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et donner son développement.
3. On suppose S nulle sur $[-1/2, 1/2]$. Montrer que (a_n) est la suite nulle.

Exercice 59 (Mines) Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On suppose $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $1/f$ est définie au voisinage de 0.
2. Rappeler pourquoi, pour $\rho \in]-R, R[$, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \rho^n < M$.
3. On suppose dans cette question qu'il existe $r > 0$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que : $\forall x \in]-r, r[$, $\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

Trouver une relation entre les suites (u_n) et (a_n) .

4. Montrer que la fonction $1/f$ est développable en série entière au voisinage de 0.

Exercice 60 (Lyon) Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que la série entière $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ représente une fraction rationnelle dans un voisinage de l'origine si et seulement si le déterminant de la matrice $(a_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n}$ est nul à partir d'un certain rang.

Exercice 61 (X-PLSR)* Soit $I =]a, b[$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.

1. Dans cette question $I =]-a, a[$. Montrer que pour tout $x \in I, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!}$.
2. On suppose de nouveau $I =]a, b[$. Montrer que pour tout $c \in I$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]c - \delta, c + \delta[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(c) \frac{(x-c)^n}{n!}$.
3. En déduire que s'il existe $x \in I$ tel que $f(x) = 0$ alors f est identiquement nulle sur I .
4. Que peut-on dire de f s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$ tels que $f^{(q)}(x) = 0$.
5. Reprendre les premières questions dans le cas où $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, f^{(2n)}(x) \geq 0$.

Exercice 62 (X) Soient $(c_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres complexes, $n_0 \in \mathbb{N}, A, K \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose $\forall n \geq n_0, |c_n| \leq \left(\frac{eAK}{n}\right)^{n/K}$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum c_n z^n$ est infini. On pose $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.
2. Montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists r_0 > 0, \forall r \geq r_0, \max_{|z|=r} |f(z)| \leq C e^{(A+\epsilon)r^K}$ où C est une constante.

Exercice 63 (Centrale-X)*

1. Rappeler la définition de la développabilité en série entière au voisinage de 0. Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ l'est-elle toujours ?
2. Montrer qu'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe $(a, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et d'un voisinage V de 0 tels que :

$$\forall x \in V, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M a^n n!.$$

Exercice 64 (Centrale-Mines)* Soit $(a_n)_{n \geq 2}$ une suite réelle telle que $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R \geq 1$.

Pour $z \in \mathbb{D}(0, 1) = D$, on pose $f(z) = z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ et l'on suppose f injective sur D .

1. Développer en série entière $\varphi : z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$. Montrer que φ est injective sur D .
2. Montrer que pour tout $z \in D$, on a : $(f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $z \in D$, on a : $(\operatorname{Im}(f(z)) > 0 \iff \operatorname{Im}(z) > 0)$.

4. Soit $R \in]0, 1[$. Calculer $\int_0^\pi \Im f(Re^{it}) \sin(nt) dt$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq n$.

Exercice 65 (X) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, f développable en série entière sur $D(0, R)$ avec $R > 0$, $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $f(z) = O(z^p)$ lorsque $z \rightarrow 0$. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, on peut trouver $2p$ nombres complexes z vérifiant $|z| = r$ et $f(z) \in \mathbb{R}$.

Exercice 66 (ENS) Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière, on ait $f(x) = o(g(x))$ quand x tend vers $+\infty$?

Formules de Cauchy et autres propriétés des fonctions analytiques

Exercice 67 (X) * Soient $D = \{z \in \mathbb{C} ; |z| \leq 1\}$, E l'ensemble des fonctions continues de D dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à $D_o = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$ est développable en série entière.

1. Soit $f \in E$. On écrit $\forall z \in D_o$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Montrer que $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, si $f \in E$, $\max_{z \in D} |f(z)| = \max_{z \in U} |f(z)|$.

3. Montrer qu'il existe K tel que, pour toute f dans E écrite comme dans la question a) et tout $N \geq 0$, on ait

$$\left| \sum_{n=0}^N a_n \right| \leq K \|f\|_\infty \ln N.$$

Exercice 68 (Mines)* Soit f une fonction développable en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq A|z|^d + B$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 69 (Mines)* Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

1. On suppose qu'il existe une suite $(z_k)_{k \geq 0}$ de complexes non nuls de modules $< R$, convergeant vers 0 et telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(z_k) = 0$. Montrer que f est nulle.

2. On suppose que $|F|$ admet un maximum local en 0. Montrer que F est constante.

Exercice 70 (Mines) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

1. Montrer que, pour tout $r \in [0, R[$, $I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$, puis que la fonction I est croissante sur $[0, R[$.

2. Si f n'est pas nulle, montrer que $I(r) > 0$ pour tout $r \in]0, R[$.

3. Montrer que la fonction $t \mapsto \ln(I(e^t))$ est convexe sur $] -\infty, \ln R[$.

Autres utilisations des séries entières

Exercice 71 (Mines) Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum n|a_n|$ converge absolument.

1. Montrer que le rayon de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à 1.

2. On suppose $|a_1| \geq \sum_{n=2}^{+\infty} n|a_n|$ avec $a_1 \neq 0$. Montrer que $f : z \in \mathbb{D} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est injective.

Exercice 72 (Mines-Centrale)*

1. Déterminer le rayon de convergence de $f : z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. Calculer $\exp(f(z))$. Ind. Considérer $t \in [0, 1] \mapsto \exp(f(tz))$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'existence de $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \det(I_n + zA) = \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \text{Tr}(A^k) z^k \right).$$

Exercice 73 (*Mines*)* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $f(z) = \sum_{p \in \mathbb{N}} \text{tr}(A^p) z^p$.
2. Calculer $f(z)$ en fonction du polynôme caractéristique de A .

Exercice 74 (*Ulm*) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \det(XI_n - A)$.

On pose $P = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n = (X - z_1) \dots (X - z_n)$.

1. Calculer de deux façons $\sum_{k=1}^n \frac{P(x)}{x - z_k}$ pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$.
2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer : $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \text{Tr}(A) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \text{Tr}(A^2) & \text{Tr}(A) & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{Tr}(A^{k-1}) & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \text{Tr}(A^k) & \text{Tr}(A^{k-1}) & \dots & \text{Tr}(A^2) & \text{Tr}(A) \end{vmatrix}$.

Exercice 75 (*ULSR*) On considère une série entière $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k$ de rayon de convergence infini. On définit F qui

à $M \in M_n(\mathbb{C})$ associe $F(M) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k M^k$.

1. Justifier que F est bien définie et continue.
2. On suppose f surjective. Montrer que F induit une surjection de l'ensemble des matrices diagonalisables vers lui-même.
3. On suppose que pour tout $\omega \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = \omega$ et $f'(z) \neq 0$. Montrer que F est une surjection de $M_n(\mathbb{C})$ dans lui-même. On pourra commencer par le cas $n = 2$.

Exercice 76 (*Ulm*) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 77 (*Mines*) Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On suppose que $\sum_{x \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$.

1. Soit I une partie finie de A . Calculer $\sum_{x \in I} \int_0^{+\infty} \frac{x^n e^x}{n!} dx$. En déduire que A est fini.
2. Conclusion ?

Exercice 78 (*SR*) Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\sum_{n \in A} \frac{x^n}{n!} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?