MP*2 LLG
2025/2026

Programme de colles - Semaine 13 - du 19/1 au 25/1

Séries entières :

Définition (les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes). Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
Définition du rayon de convergence d'une série entière. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série converge absolument ; pour tout z tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Disque ouvert de convergence ; intervalle ouvert de convergence. Si $a_n = O(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$. Utilisation de la règle de d'Alembert.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Propriétés de la somme : La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon r strictement inférieur à R. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

Série entière d'une variable réelle : Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence ; intégrale sur un segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.
La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout n, $a_n = b_n$.
Théorème radial d'Abel.

Fonctions développables en série entière : Définition. Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\mathbb{D}(0,1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.
Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Une telle fonction est alors de classe C^∞ et le développement est unique ; il s'agit de la série de Taylor de la fonction. Développements en série entière des fonctions exponentielles, hyperboliques, circulaires, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto \ln(1-x)$, arctan et $x \mapsto (1+x)^\alpha$. Solutions développables en série entière d'une équation différentielle linéaire.

Des compléments sur le comportement sur le bord, les formules de Cauchy, et d'autres résultats classiques (principe du maximum...) ont été vus mais ils ne sont pas au programme et doivent être redémontrés.

Suites et séries de fonctions, intégration : exercices de révision.