Feuille d'exercices : Probabilités discrètes

Probabilités finies et discrètes

Exercice 1 (CCINP)

1. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 2 (Mines) Soit E un ensemble fini de cardinal n.

1. Dénombrer le cardinal de l'ensemble des couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.
2. Une urne contient n boules. On en tire une poignée aléatoirement, on remet les boules dans l'urne et on en tire une deuxième poignée. Quelle est la probabilité pour qu'aucune boule n'ait été tirée deux fois ?
3. On tire indépendamment deux parties A et B de E et l'on définit les variables aléatoires $I = |A\cap B|$ et $U = |A\cup B|$. Quelle est la loi de I ? Montrer que I et U admettent des variances et les calculer.

Exercice 3 (Mines) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé.

1. Soient A_1 et A_2 dans $\mathcal{T}$. Calculer $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) + \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cup A_2\right) + \mathbb{P}\left(A_1 \cup \overline{A_2}\right) + \mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}\right)$.
2. Soient $A_1, \dots, A_n$ dans $\mathcal{T}$. On pose $\Gamma = \{A_1, \overline{A_1}\} \times \dots \times \{A_n, \overline{A_n}\}$. Calculer

$$\sum_{(B_1,\dots,B_n)\in\Gamma} \mathbb{P}(B_1 \cup \dots \cup B_n).$$

Exercice 4 (Mines) * Soit $n \in N$, un entier naturel supérieur à 2. On définit une probabilité uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Pour un entier p divisant n, on introduit l'événement $A_p = \{1 \leqslant k \leqslant n/p \text{ divise } k\}$

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Soient p et q deux diviseurs de n. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Montrer que les événements A_p et A_q sont indépendants. Plus généralement montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont des diviseurs deux à deux premiers entre eux alors, les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont indépendants.
3. On note
$$B = \{1 \leqslant k \leqslant n/k \text{ et } n \text{ sont premiers entre eux}\}$$
Montrer $p(B) = \prod\limits_{\substack{p \text{ diviseur} \\ \text{premier de } n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
4. En déduire la formule usuelle pour $\varphi(n)$.

Exercice 5 (Mines-Centrale) *

1. Pour $s > 1$ on note $\zeta(s) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$. Et on pose $\mathbb{P}_s$ qui, à $A \subset \mathbb{N}^*$, associe $\mathbb{P}_s(A) = \frac{1}{\zeta(s)} \sum\limits_{k\in A} \frac{1}{k^s}$. Montrer que $\mathbb{P}_s$ est une probabilité.
2. Calculer l'image par $\mathbb{P}_s(A_n)$ où A_n désigne l'ensemble des multiples d'un entier n.
3. On note (p_n) la suite des nombres premiers ; montrer que les évènements A_{p_n} pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendants pour $\mathbb{P}_s$.
4. En déduire que $\frac{1}{\zeta(s)} = \prod\limits_{i\geqslant 1} (1 - \frac{1}{p_i})$.
5. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 6 (ENS) * Soient A, B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que $|\mathbb{P}(A\cap B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)| \leqslant 1/4$.

Autour des urnes

Exercice 7 (Mines) Soit $p \in]0,1[$. On tire avec remise dans une urne contenant une proportion p de boules blanches et $1-p$ de boules noires. Donner la loi du nombre de tirages nécessaires pour obtenir n boules blanches.

Exercice 8 (Mines) * Une urne contient deux boules, une rouge et une blanche. À chaque étape, on pioche une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec deux nouvelles boules de sa couleur.

1. Quelle est la probabilité de piocher n boules rouges en n étapes ?
2. Quelle est la probabilité de ne piocher que des boules rouges, indéfiniment ?
3. On modifie le jeu. Au lieu de rajouter deux boules de la couleur de la boule piochée, on en rajoute $p \geqslant 2$. Quelle est la probabilité de ne piocher que des boules rouges, indéfiniment ?
4. Donner un équivalent de la probabilité π_n de piocher n boules rouges au bout de n étapes pour n tendant vers l'infini.

Exercice 9 (Mines) Soit $n \geqslant 3$. On dispose d'une urne pourvue de n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules sans remise jusqu'à ce que les boules 1, 2 et 3 soient sorties. On note X le nombre de boules tirées.

1. Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent consécutivement et dans cet ordre.
2. Calculer la probabilité que les boules 1, 2 et 3 sortent dans cet ordre, consécutivement ou pas.
3. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 10 (Mines)

1. Soient p et q dans $\mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} \binom{k}{p} = \binom{q+1}{p+1}$.
2. Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On retire les boules une à une et on note X le nombre de tirages nécessaire pour retirer toutes les boules blanches. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n) = \dfrac{\binom{n-1}{b-1}}{\binom{r+b}{b}}$.
3. Caculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 11 (Mines) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules numérotées $1, \dots, 2n$. On effectue n tirages sans remise.

1. Déterminer la probabilité de tirer, dans cet ordre, $1, 3, 5, \dots, 2n-1$.
2. Déterminer la probabilité de tirer, pas forcément dans cet ordre, $1, 3, 5, \dots, 2n-1$.
3. Déterminer la loi de la variable aléatoire X donnant le rang du dernier numéro impair obtenu. Calculer $E(X)$.

Exercice 12 (ULSR) * Dans une urne, on a n boules noires et n boules blanches. On les tire indépendamment et uniformément sans remise jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des boules d'une seule couleur. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de boules restantes : $O(1)$, $\ln(n)$, $\sqrt{n}$ ou n ?

Exercice 13 (Mines) * Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2N$ boules blanches et N noires. On effectue des tirages avec remise et on note X le nombre de tirages nécessaires pour avoir deux boules blanches consécutives. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \mathbb{P}(X \geqslant n)$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n \geqslant 1}$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que X possède un moment à tout ordre.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Autour du jeu de pile ou face

Exercice 14 (ENS) * On effectue une série infinie de lancers de pile ou face équiprobables. On définit les variables aléatoires T_{FF} et T_{PF} donnant respectivement le rang de la première apparition de FF et de la première apparition de PF. : $T_{PF} = min\,\{i \geqslant 2,\ X_i = F \text{ et } X_{i-1} = P\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que T_{FF} et T_{PF} sont presque sûrement finis et déterminer leurs espérances. Généraliser.

Exercice 15 (Centrale)

1. Montrer que $X^3 - X^2 - X - 1 = (X-a)(X-b)(X-\overline{b})$ avec $a \in]1,2[$, $b \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ et $|b| < 1$.
2. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée. On note p_n la probabilité pour que la séquence PPP apparaisse pour la première fois au n-ième lancer. Exprimer p_{n+3} en fonction de p_n, p_{n+1}, p_{n+2}.
3. Donner une expression et un équivalent de p_n.

Exercice 16 (X) On procède à une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. Alice gagne à l'instant n lorsque, pour la première fois à cet instant, la séquence **FFP** est apparue alors que la séquence **FPP** n'est pas encore apparue auparavant. Bernard gagne à l'instant n lorsque, pour la première fois à cet instant, la séquence **FPP** est apparue alors que la séquence **FFP** n'est pas encore apparue auparavant. On note α_n la probabilité qu'Alice gagne à l'instant n. Déterminer un équivalent de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 17 (Paris) On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de Pile soit égal au double du nombre de Face. Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter ?

Exercice 18 (L) On jour à pile ou face avec une pièce pipée : la probabilité de tomber sur pile vérifie $p < \dfrac{1}{2}$. On effectue plusieurs lancers à la suite. Notre score est le nombre de fois où l'on est tombé sur pile. On gagne le jeu si, au bout de $2n$ lancers, le score est supérieur à $n+1$. Trouver n qui maximise la probabilité de gagner le jeu au bout de $2n$ lancers.

Lois marginales - Lois conjointes

Exercice 19 (CCINP) On considère X et Y deux variables aléatoires telles que pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a_{i,j} = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois de X et de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Trouver à l'aide de la variable aléatoire $X - 1$ l'espérance et la variance de X.

Exercice 20 (Mines-Ponts) Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \,]0,1[\setminus\{1/2\}$. On considère des variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\mathbf{P}(X = k, Y = n) = a\,\dfrac{(1-p)^{n-k}}{2^n}\mathbf{1}_{k\leqslant n}$

1. Calculer a, puis les lois de X et Y.
2. Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X et Y.
3. Calculer la covariance de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 21 (Mines-Ponts) Soient $a \in \,]0,1[$, $b > 0$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{e^{-b} b^i a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}\mathbf{1}_{i\geqslant j}$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
4. Les variables aléatoires Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 22 (CCINP) Soient λ et μ dans $\mathbb{R}^{+*}$, X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer, si $n \in \mathbb{N}$, la loi de X conditionnellement à l'événement $(X + Y = n)$.

Exercice 23 (CCINP) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer $\mathbb{P}(X + Y = k)$.
2. Même question pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.
3. En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X + Y + Z = n)$.

Autour des variables aléatoires discrètes usuelles

Exercice 24 (CCINP-Mines-Centrale) * On donne des variables aléatoires indépendantes T et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$, T suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour $i \in \mathbb{N}$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p, avec $p \in]0,1[$.

On note $S = \sum_{i=1}^{T} X_i$ (S dénote le nombre de succès). On notera de même E le nombre d'échecs.

1. Montrer que S est une variable aléatoire (on pourra décrire l'événement $(S = n)$ sans chercher à calculer sa probabilité).
2. Montrer que S suit une loi de Poisson de paramètre λ_S que l'on déterminera.

3. Admet-elle une espérance ? Si oui que vaut-elle ?
4. En déduire, sans calcul, que E suit également une loi de Bernoulli de paramètre λ_E que l'on explicitera. Montrer que S et E sont indépendantes.
5. (a) Une usine comporte deux chaînes de production, A qui produit 60% des objets, et B le reste. Un objet issu de A a une probabilité de $0,1$ d'être défectueux, probabilité qui vaut $0,2$ si l'objet provient de B.
   Donner la probabilité pour qu'un objet choisi au hasard soit défectueux.
   (b) Donner la probabilité pour qu'un objet constaté défectueux provienne de A.
   (c) On suppose que le nombre d'objet Y_A produit par A en une heure, suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 20$; donner la loi du nombre d'objets défectueux X_A produits par A en une heure.

Exercice 25 (Mines) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $D = \mathrm{Diag}(X_1, \dots, X_n)$ et $M = P\,D\,P^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Lois et espérances de $\mathrm{Tr}(M)$, $\det(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$?
2. Probabilité pour que les sous-espaces propres de M aient tous la même dimension ?
3. Soit $U = (X_1, \dots, X_n)$ et $A = {}^tU\,U$. Donner la loi des coefficients de A. Donner la loi de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{rg}(A)$.

Exercice 26 (Mines-CCINP-Saint Cyr) * Soit $p \in\,]0,1[$. On pose $q = 1 - p$. On se donne une suite de variables aléatoires indépendantes (X_n) suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$ et $\mathbb{P}(X_i > n)$.
2. On considère les variables U et V définies par $U = \max(X_1, X_2)$ et $V = \min(X_1, X_2)$. Déterminer la loi du couple (U, V) et les lois de U et de V. U et V sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $U + V$ et calculer son espérance.
4. Soit $N \geqslant 2$. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$, c'est à dire : $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min\left(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega)\right)$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(Y > n)$. En déduire $\mathbb{P}(Y \leqslant n)$, puis $\mathbb{P}(Y = n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.
5. On pose $Z_n = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$. Trouver un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ quand n tend vers l'infini.

Exercice 27 (Mines) On considère X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes sur le même espace probabilisé Ω. On suppose que X suit une loi de Poisson. Montrer que Y suit une loi de Poisson si et seulement si $X + Y$ suit une loi de Poisson.

Exercice 28 (Centrale) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $\dfrac{X}{Y}$.

Exercice 29 (X) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On note J_n la matrice $(1_{j\equiv i+1\,[n]})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de J_n.
2. On suppose que n est premier et on admet que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} X^k$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On se donne $(X_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Soit M la matrice aléatoire

$$\begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} \\ X_{n-1} & X_0 & X_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & X_2 \\ X_2 & & \ddots & \ddots & X_1 \\ X_1 & X_2 & \cdots & X_{n-1} & X_0 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer $\mathbb{P}(M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 30 (SR) On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = (1-p)^k p$. On considère $A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = k)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{rg}(A))$.

3. Calculer $\mathbb{P}(A \in GL_2(\mathbb{Z}))$; la comparer à $\mathbb{P}(A \in GL_2(\mathbb{R}))$.
4. Calculer $\mathbb{P}(A \in SO_2(\mathbb{R}))$.
5. Si on note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ X-Y & Y \end{pmatrix}$, que vaut $\mathbb{P}(\tilde{A} \in SO_2(\mathbb{R}))$?
6. Soit $z \in \mathbb{R}$. On considère $A' = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ z & Y \end{pmatrix}$, que vaut $\mathbb{P}(A' \in SO_2(\mathbb{R}))$?
7. Que vaut $\mathbb{P}(A\,\mathrm{DZ})$?
8. Soit $(X_{i,j})$ variables aléatoires *iid* suivant la loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. Que vaut $\mathbb{P}((X_{i,j}) \in O_n(\mathbb{R}))$?

Exercice 31 (X) * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n (resp. B_n) est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont indépendants et suivent une loi uniforme sur $\{0, 1\}$ (resp. $\{-1, 1\}$). On note $p_n = \mathbb{P}(A_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ et $q_n = \mathbb{P}(B_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que $q_{n+1} = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geqslant \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

Variables aléatoires discrètes

Exercice 32 (Mines) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose qu'il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $Y = f(X)$. Que dire de Y ?

Exercice 33 (Mines) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes positives telles que $X \sim Y$ et $X + Y \sim 2X$. Montrer que X est constante.

Exercice 34 (Mines-ENS)

1. * Que peut-on dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle-même ?
2. (ENS) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^*$. Soit une variable aléatoire discrète réelle telle que $X \sim aX + b$. Montrer que X est presque sûrement constante.

Exercice 35 (SR) * On dit qu'une variable aléatoire discrète (*vad*) est décomposable s'il existe deux *vad* indépendantes et non *p.s.* constantes telles que $Y + Z$ et X suivent la même loi.

1. Pour quels $p \in]0, 1[$, une *vad* suivant une loi de Bernoulli de paramètre p est-elle décomposable ?
2. Pour quels $p \in]0, 1[$ et quels $n \in \mathbb{N}^*$, une *vad* suivant une loi binomiale de paramètres (n, p) est-elle décomposable ?
3. À l'aide de l'étude de la factorisation en irréductibles de $T^4 + 2T + 1$, montrer qu'il existe une *vad* décomposable X telle que X^2 ne soit pas décomposable.

Exercice 36 (Ulm) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $\lambda \in]0, 1[$.

1. Montrer que, pour tout réel t, l'ensemble $A_t = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n X_n \leqslant t\right)$ est un événement.
2. Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{P}(A_t)$ est continue.

Exercice 37 (Ulm) * Soient p un nombre premier, $n \in \mathbb{N}^*$, P et Q deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Calculer $\mathbb{P}(P \wedge Q = 1)$.

Exercice 38 (ENS) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*} \backslash \mathbb{Q}$. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de variables i.i.d suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On pose $e_k(x) = e^{2i\pi kx}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et l'on admet que $\mathrm{Vect}(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est dense dans l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, lorsqu'il est muni de la norme uniforme. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$.

Montrer que $\mathbb{P}\big(\alpha S_n - \lfloor \alpha S_n \rfloor \in [a, b]\big) \to b - a$.

Exercice 39 (ENS) Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite équirépartie modulo 1 lorsque, pour tous $a < b$ dans $[0, 1]$, $\dfrac{1}{n}\big|\{k \in [\![1, n]\!],\ \ a \leqslant \{x_k\} \leqslant b\}\big| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} b - a$. On admet que cette condition est équivalente à $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi x_k} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. Soit α un irrationnel. Montrer que la suite $(n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est équirépartie modulo 1.

2. On fixe $(i,j) \in \mathbb{N}^* \times [\![0,9]\!]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une variable aléatoire X_n suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note β_n la probabilité de l'événement : le i-ème chiffre de 2^{X_n} en base 10 (en partant de la gauche) est j. Montrer que $(\beta_n)_n$ converge et préciser sa limite.

Exercice 40 (ENS) Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $\mathcal{S}_n$, et on considère l'événement $A_n = \{\omega \ ; \ \forall j \in [\![1,n]\!], \ \exists \sigma \in \langle X_n(\omega), Y_n(\omega)\rangle, \ \sigma(1) = j\}$ (où $\langle X_n(\omega), Y_n(\omega)\rangle$ désigne le sous-groupe engendré par les éléments $X_n(\omega)$ et $Y_n(\omega)$), et on note p_n sa probabilité. Montrer que p_n tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Éspérances de variables aléatoires : calculs explicites

Exercice 41 (CCINP) On considère $X_{1,1}$, $X_{1,2}$, $X_{2,1}$, $X_{2,2}$, variables aléatoires, indépendantes, identiquement distribuées, vérifiant $P(X_{i,j} = -1) = P(X_{i,j} = 1) = \dfrac{1}{2}$ et on note $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $E(\det M)$ et $V(\det M)$; que dire de $\det M$ et $-\det M$?
2. Donner la probabilité que M soit orthogonale, celle qu'elle soit inversible puis celle qu'elle soit diagonalisable.

Exercice 42 (Mines) On dispose de n chapeaux et n tiroirs. On range aléatoirement chaque chapeau dans un des tiroirs (chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à n chapeaux). On note X_k la variable aléatoire donnant le numéro du tiroir dans lequel est rangé le chapeau numéro k. On note Z_n la variable aléatoire donnant le nombre de tiroirs vides à l'issue du rangement.

1. Calculer espérance et variance de Z_n.
2. Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ et de $\mathbf{V}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 43 (Mines) On considère trois variables aléatoires indépendantes deux à deux : $X \sim \mathcal{B}(p))$, $Y \sim \mathcal{G}(a)$ et $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

1. On définit une nouvelle variable aléatoire U telle que $U(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) = 0 \\ Y(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer l'espérance et la variance de U.
2. On définit une nouvelle variable aléatoire V telle que $V(\omega) = \begin{cases} Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \\ Z(\omega) & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer l'espérance et la variance de V.

Exercice 44 (Centrale) * On considère des paquets de cartes, tous identiques, contenant chacun r cartes différentes (numérotées de 1 à r). On tire succesivement une carte dans chacun des paquets, et on note $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les résultats des tirages. Ainsi les X_k sont des variables aléatoires uniformes sur $\{1,\dots,r\}$, indépendantes.
Et on note pour $i \in \{1,\dots,r\}$, $T_i = \min\{k \in \mathbb{N}, \ \text{Card}(\{X_1(w), \dots X_k(w)\}) = i\}$. Et $T = T_r$.

1. Déterminer si les (T_i) sont indépendantes.
2. Loi de $Y_i = T_i - T_{i-1}$ en calculant d'abord $\mathbb{P}(Y_i = k | T_{i-1} = t)$.
3. En déduire l'espérance de T, et montrer que celle-ci est équivalente (pour r tend vers l'infini) à $r \ln r$.

Exercice 45 (L) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On met n cartes différentes dans un boîte et un joueur les tire uniformément avec remise. Donner l'espérance du nombre de tirages nécessaires pour avoir pioché au moins une fois chaque carte.

Exercice 46 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant chacune la loi uniforme sur

$$\left\{\frac{k}{n} \ ; \ k \in \{0,\dots,n-1\}\right\}.$$

On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.

1. Montrer que $Z \ : \omega \mapsto \inf\{k \in \mathbb{N}^*, \ S_k(\omega) \geqslant 1\}$ est presque sûrement finie.
2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Éspérances de variables aléatoires : propriétés générales

Exercice 47 (TPE) Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.

1. Trouver $m \in \mathbb{R}$ minimisant $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}((X-x)^2)$.
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. On suppose que $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = 1$. Montrer que $\mathbb{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 48 (Mines) * Soit X une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie ; montrer que, lorsque $x \to +\infty$, $\mathbb{P}(X \geqslant x) = o(1/x)$. *Ind.* Commencer par le cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Exercice 49 (Mines) Soient X, Y deux variables indépendantes et de même loi à valeurs strictement positives. Montrer que $\mathbb{E}(X/Y) \geqslant 1$.

Exercice 50 (ULCR) Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leqslant_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.
2. Donner un exemple non trivial ($X \neq Y$) de deux variables aléatoires X et Y de même support telles que $X \leqslant_c Y$.
3. Montrer que si $X \leqslant_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leqslant \mathbf{V}(Y)$.
4. Montrer que $X \leqslant_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geqslant x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 51 (Mines-ENS) * Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit croissante et X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant f'(\mathbb{E}(X))(x - \mathbb{E}(X)) + f(\mathbb{E}(X))$.
2. En déduire que $\mathbb{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbb{E}(X))$.
3. (ENS) Montrer ce résultat plus généralement pour une fonction f convexe sur $\mathbb{R}$ mais non nécessairement dérivable.

Exercice 52 (Ulm-Mines) * Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $R_n = \mathrm{Card}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

1. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(R_n) \leqslant a + n\,\mathbb{P}(X_1 \geqslant a)$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(n)$.
3. On suppose que les X_i admettent une espérance. Montrer que $\mathbb{E}(R_n) = o(\sqrt{n})$.

Exercice 53 (Ulm) Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G. Montrer : $\mathbf{E}\left(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|\right) \leqslant \dfrac{nd}{2} \max\limits_{s \in S} \mathbf{E}\left(|f(X) - f(X+s)|\right)$.

Exercice 54 (Ulm) On considère n variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Montrer que, pour tout réel $p > 0$, il existe $(c_p, C_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ indépendant de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $(z_1, \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n$, $c_p \left(\sum\limits_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\mathbb{E}\left|\sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_i z_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p \left(\sum\limits_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Inégalités de concentration et convergence

Exercice 55 (IMT)

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant x) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(\mathrm{e}^{2X})}{\mathrm{e}^{2x}}$.

Exercice 56 (ULSR) * Soient $\theta \in \,]0,1[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\mathbf{P}(X > 0) > 0$. Montrer que $\mathbf{P}\left(X \geqslant \theta\,\mathbf{E}(X)\right) \geqslant \dfrac{(1-\theta)^2 \mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}(X^2)}$.

Exercice 57 (ENS-Mines) * Soient $X_1, \ldots X_n$ des variables aléatoires réelles, mutuellement indépendantes, centrées, à valeurs dans $[-1, 1]$. . On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^n X_k$.

1. Montrer que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times [-1, 1]$, $\mathrm{e}^{tx} \leqslant \dfrac{1-x}{2}\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{1+x}{2}\mathrm{e}^{t}$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\mathbb{E}\left(e^{tS_n}\right) \leqslant e^{nt^2/2}$.

3. Démontrer que pour tout $a > 0$, $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant a) \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{a^2}{2n}\right)$.
4. Soit $\varepsilon > 0$. En déduire que $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant e^{-\epsilon^2 n/2}$.
5. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées, et $(c_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels tels que $\forall n \geqslant 1,\ |X_n| \leqslant c_n$.

   Montrer que pour tout réel t, $\mathbf{E}(e^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)$.
6. Avec les données de la question précédente, montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$,
   $\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{2\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\right)$.
7. Soit $\alpha > 1/2$. On suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires bornées indépendantes et de même loi. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\dfrac{|S_n - n\mathbb{E}(X_1)|}{n^\alpha} > \varepsilon\right) = 0$.

Exercice 58 (X) Soit X une variable aléatoire discrète positive ayant un moment d'ordre 2 et telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$. Montrer que, pour $t > 0$, $\mathbf{P}(X - \mathbb{E}(X) \leqslant -t) \leqslant \exp\left(-\dfrac{t^2}{\mathbb{E}(X^2)}\right)$.

Exercice 59 (ENS-Centrale) * Soient (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes centrées et ayant un moment d'ordre 2. On suppose que $\sum_{i=1}^{+\infty} E(X_i^2) = \sigma^2 \in \mathbb{R}$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $C > 0$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(|S_n| > C) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{C^2}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| > C\right) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(S_n^2)}{C^2}$.

   Indication : Que dire des événements $A_k = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant k} |S_i| \geqslant C > \max_{1\leqslant i\leqslant k-1} |S_i|\right)$? Minorer $\mathbb{E}(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k})$.
3. Soient (Y_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. avec $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$ et $\alpha > 1/2$. Montrer que $\sum \dfrac{Y_n}{n^\alpha}$ converge presque sûrement.

Exercice 60 (Ulm-Mines) * Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes strictement positives, toutes d'espérance 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

Montrer que $(P_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\prod_{k=1}^{n} E(\sqrt{X_k}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. *On pourra le montrer avec la question précédente, ou sans l'utiliser.*

Exercice 61 (ULSR) *

1. Soient $\lambda \in]0,1[$ et $X \in L^2$ positive telle que $\mathbf{E}(X^2) > 0$. Montrer que : $\mathbf{P}(X \geqslant \lambda\mathbf{E}(X)) \geqslant \dfrac{(1-\lambda)^2\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\sum X_n$ converge *p.s* si et seulement si la série $\sum \mathbb{E}(\min(1, X_n))$ converge.
3. Soit $\alpha > 0$. On suppose que $\mathbb{P}(X_n \geqslant r) \underset{r\to+\infty}{\sim} r^{-\alpha}$. Trouver une CNS sur $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ pour que $\sum x_n X_n$ converge presque sûrement.

Exercice 62 (ENS)

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $0 < \mathbb{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(X > 0) \geqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$.

   Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne un réel $p_n \in]0,1[$. On considère le graphe aléatoire non orienté Γ_n, de sommets $1, 2 \ldots, n$, tel que, pour tout (i,j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, si $X_{i,j}$ est la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque (i,j) est une arête de Γ_n et 0 sinon, les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note alors Y_n la variable aléatoire qui donne le nombre de sommets isolés (reliés à aucun autre).
2. On suppose que $\dfrac{\ln n}{n} = o(p_n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \to 0$.

3. On suppose cette fois que $p_n = o(\ln n/n)$. Montrer que $\mathbb{P}(Y_n > 0) \to 1$.

Exercice 63 (Ulm) Soit $(p_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note G_n le graphe aléatoire G_{n,p_n} d'Erdös-Renyi, c'est-à-dire un graphe aléatoire de sommets $[\![1,n]\!]$ et une famille $(X_{\{i,j\}})_{\{i,j\}\in\mathcal{P}_2([\![1,n]\!])}$ de variables de Bernoulli i.i.d. de paramètre p_n, avec $X_{\{i,j\}} = 1$ si et seulement s'il existe une arête reliant i et j. On note I_n le nombre de sommets isolés de G_n.

1. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geqslant (1+\varepsilon)\dfrac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geqslant 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \leqslant (1-\varepsilon)\dfrac{\ln(n)}{n}$. Montrer que $\mathbf{P}(I_n \geqslant 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exercice 64 (Mines)

1. Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires définies sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$ telle que X_n suit une loi géométrique de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$
   (a) Déterminer, pour $x \geqslant 0$, $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(\dfrac{X_n}{n} \leqslant x)$.
   (b) Exhiber $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, telle que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
   (c) Comparer $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\dfrac{X_n}{n}\right)$ et $\displaystyle\int_0^\infty tf(t)\ \mathrm{d}t$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\left(\dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$ et $\displaystyle\int_0^\infty t^2 f(t)\ \mathrm{d}t$.
2. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = F(k+1) - F(k)$; déterminer $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Y^2)$.

Exercice 65 (Mines) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ majorée.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles. Montrer que la variable aléatoire $f(X)$ admet un moment à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Ce moment est noté $M_n(f(X))$.
2. Montrer que $\left(M_n(f(X))^{1/n}\right)_{n\geqslant 1}$ possède une limite lorsque $n \to +\infty$, limite que l'on précisera.

Exercice 66 (ENS) * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles ayant un moment d'ordre 2. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(X_n^2) \leqslant M$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :

(i) pour toute $f \in \mathcal{C}^1$ bornée et à dérivée bornée, on a $\mathbb{E}(X_n f(X_n) - f'(X_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;

(ii) pour toute $f \in \mathcal{C}^0$, on a $\mathbb{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 67 (X) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $\mathbf{P}(X_n = n) = \dfrac{1}{n}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Déterminer la limite de $\left(\mathbf{E}\left(e^{-\lambda\frac{S_n}{n}}\right)\right)_{n\geqslant 1}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ dérivable sur $]1, +\infty[$ et telle que : $\forall x > 1,\ f(x-1) + xf'(x) = 0$ et $\forall x \in]0,1]\,,\ f(x) = 1$. Montrer qu'il existe une unique fonction f qui respecte ces conditions, qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$.
3. On définit $\phi(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)\mathrm{t}$, avec f la fonction de la question précédente. Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(e^{-\lambda\frac{S_n}{n}}\right) = e^{-k}\phi(\lambda)$.

Fonctions génératrices

Exercice 68 (Mines) On tire selon l'usage et avec remise une boule parmi 100, dont 20 sont blanches et 80 sont noires. On note X l'instant d'apparition de la troisième boule blanche. Déterminer la fonction génératrice de X, son espérance et sa variance éventuelles.

Exercice 69 (Mines-X) * Peut-on piper deux dés de sorte que, les lancers étant supposés indépendants, leur somme suive la loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$?

Exercice 70 (CCINP-Mines) *

1. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si X est à valeurs dans $[\![n, +\infty[\![$ et si, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant n$,
   $P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}(1-p)^{k-n}p^n$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d suivant une loi géométrique de paramètre p. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale négative de paramètres n et p.
2. Un opérateur appelle r clients. La probabilité qu'un client réponde est p. Soit Y_1 la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus lors de cette première série d'appels.
   (a) Donner la loi de Y_1.
   (b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - Y_1$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y_2 la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y_2 = k | Y_1 = i)$.
   (c) Prouver que $Z = Y_1 + Y_2$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
   (d) Déterminer l'espérance et la variance de Z.
   (e) On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'appels nécessaires pour que chacun des clients ait été appelé. Déterminer la fonction génératrice de X, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 71 (Mines)

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive telle que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.
   Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ est définie et continue sur $[0, 1]$.
   On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$ et on suppose que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 1$; montrer que $\sum_{k \geqslant 1} p_k$ converge et calculer sa somme.
2. Sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la variable aléatoire X vérifie $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p(X = k) = p_k$.
   Montrer que la fonction génératrice de X, notée G_X, est de classe C^1 sur $[-1, 1]$.
   En déduire que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 72 (Mines) Soient X une variable aléatoire à valeurs réelles et $M_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{tX}\right)$.

1. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer le domaine de définition de M_X ainsi qu'une expression de $M_X(t)$.
2. Soit $a > 0$. On suppose que M_X est définie sur $]-a, a[$. Montre qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Déterminer $M_X^{(k)}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 73 (PLSR) * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire σ_n suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. On note Y_n la variable aléatoire donnant le nombre de cycles de σ_n. Déterminer G_{Y_n}. Puis, calculer $E(Y_n)$ et déterminer un équivalent de $E(Y_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 74 (PLSR-X) * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la variable aléatoire σ_n suivant la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$. On note X_n a variable aléatoire donnant le nombre de points fixes de σ_n.

1. Calculer $P(X_n = n)$. Déterminer la loi de X_n.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de $P(X_n = k)$.
3. Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que $\lim_{n \to \infty} |P(X_n) = k - P(X = k)| = 0$.
4. Les n participants à une soirée déposent leur veste au vestiaire. À la fin de la soirée,les vestes sont redistribuées aléatoirement. Soit X le nombre d'invités qui retrouvent leur veste. Préciser la loi, l'espérance et la varaince de X.

Exercice 75 (PLSR) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1, \mathbf{E}(X^2) = 2$ et $\mathbf{E}(X^3) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

Exercice 76 (ENS) On cherche à déterminer les fonctions $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant une loi géométrique, la variable aléatoire $\psi(X)$ suive une loi géométrique.

1. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note $\phi_r : n \in \mathbb{N}^* \to \left\lfloor \dfrac{n-1}{r} \right\rfloor + 1$. Montrer qu'elle vérifie la propriété souhaitée.

   On considère ψ vérifiant la propriété souhaitée. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_k : t \in]-1,1[\mapsto \displaystyle\sum_{i\psi^{-1}(\{k\})} t^{i-1}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in]-1,1[$, $f_k(t) = f_1(t)\left(1 - f_1(t) + tf_1(t)\right)^{k-1}$.
3. Calculer $f_k(0)$.
4. Montrer que ψ est l'une des ϕ_r.

Exercice 77 (ENS) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suivant une loi de Poisson, la variable aléatoire $f(X)$ suive une loi de Poisson.

Exercice 78 (X) Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires *iid* à valeurs dans $[\![1,N]\!]$. On définit $S_0 = 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $E = \{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(n \in E) = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(x_1 = k)\mathbb{P}(n-k \in E)$.
2. On définit $\begin{cases} f(z) &= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(n \in E) z^n \\ g(z) &= \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 = n) z^n \end{cases}$. Montrer que pour $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \dfrac{1}{1-g(z)}$.
3. Montrer que 1 est pôle simple de $\dfrac{1}{1-g}$ et que les autres pôles sont de module strictement plus grand que 1.
4. Montrer que la partie polaire associée au pôle 1 dans la *DES* de f est $\dfrac{a}{1-z}$ avec $a = \dfrac{1}{\mathbb{E}(X_1)}$.
5. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(n \in E) = \dfrac{1}{\mathbb{E}(X_1)}$.

Exercice 79 (X) Soient $a \in]0,1[$ et $\varphi_a : x \mapsto 1 - (1-x)^a$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X_a à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$, $\varphi_a(x) = \mathbf{E}\left(x^{X_a}\right)$.
2. Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(A_n) = \dfrac{a}{n}$.

   On pose $Y = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{1}_{A_n} = 1\}$. Montrer que $Y \sim X_a$.

   On considère l'équation fonctionnelle : $\forall x \in [0,1]$, $\varphi_a(x) = x\,\varphi\left(\varphi_a(x)\right)$ d'inconnue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour $a \in [1/2, 1[$ cette équation admet une unique solution continue, qui est de plus la fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
4. Montrer que ce n'est pas le cas pour $a = 1/3$.

Chaînes de Markov, marches aléatoires et autres processus stochastiques

Exercice 80 (ENTPE-EIVP-Centrale)

On note A_k le point d'affixe $z_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$. À $t = 0$, une puce se trouve en A_0. À tout instant, une puce en position A_k fait un bond, de manière équiprobable, vers l'un des deux points voisins sur le cercle. On note $X_m = k$ l'évènement : la puce est sur A_k à l'instant m et on pose $U_m = \begin{pmatrix} p(X_m = 0) \\ \vdots \\ p(X_m = n-1) \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $U_{m+1} = AU_m$.
2. Montrer que A est diagonalisable et en donner ses éléments propres.
3. Exprimer U_m en fonction de A.
4. En déduire le comportement asymptotique de (U_m) quand m tend vers l'infini (on supposera n impair).

Exercice 81 (Mines) On considère deux compartiments séparés par une valve. À l'instant $t = 0$, le compartiment A contient $2N$ particules et le second est vide. On ouvre la valve. à chaque instant, de manière équiprobable, une des $2N$ particules passe d'un compartiment à l'autre. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n.

1. Soit $k \in [\![0, 2N]\!]$. Trouver une relation entre $\mathbf{P}(X_n > k)$, $\mathbf{P}(X_{n-1} > k+1)$, $\mathbf{P}(X_{n-1} = k+1)$ et $\mathbf{P}(X_{n-1} = k)$.
2. En déduire que, pour $n \geqslant 1$, $\mathbf{E}(X_n) = 1 + \left(1 - \dfrac{1}{N}\right)\mathbf{E}(X_{n-1})$.

3. Déterminer $\mathbf{E}(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X_n)$.

Exercice 82 (Mines) Soient $p \in]0,1[$, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p. On pose $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ X_1 = X_2 = \cdots = X_k\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.

1. Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
2. Si $L_1 < +\infty$, soit $L_2 = \max\{\ell \in \mathbb{N}^* \ ; \ X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = \cdots = X_{L_1+\ell}\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.

Exercice 83 (X) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Dénombrer l'ensemble $E_n = \left\{ f \in [\![1,n]\!]^{[\![1,n]\!]} \ ; \ \forall i \in [\![1,n]\!], \ f(i) \leqslant i \right\}$.
2. Soit f_n suivant la loi uniforme sur E_n. Soit $X_n = \min\{k \in \mathbb{N}^*, \ f_n^k(n) = f_n^{k-1}(n)\}$. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. Calculer $\mathbb{P}\left(f_n^{X_n}(n) = k\right)$.

Exercice 84 (ULCR) *** On fixe $\mathbb{N} \in \mathbb{N}^*$, et on choisit $u_1 \in [\![1, N]\!]$, puis $u_2 \in [\![1, u_1 - 1]\!]$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_l = 1$ (avec nécessaiement $l \leqslant N$). On note $E_N = \{u_j, \ 1 \leqslant j \leqslant l\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
2. Calculer $\mathbb{P}(2 \in E_N | 3 \notin E_N)$.
3. Calculer $\mathbb{E}(|E_N|)$ et $\mathbb{V}(|E_N|)$.

Exercice 85 (Lyon) *** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geqslant 1$.

1. Calculer l'espérance du nombre R de retour en zéro de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ distinct de $\mathbb{R}$. Montrer que la probabilité qu'il existe $n \geqslant 1$ tel que $S_n \notin I$ est égale à 1.
3. Montrer que l'événement $(R = +\infty)$ est presque sûr.

Exercice 86 (X-Lyon-SR) *** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère la variable aléatoire définie par $T = \min\{k \geqslant 1, \ S_k = 1\} = \min\{k \geqslant 1, \ S_k > 0\}$ si l'ensemble considéré est non vide, $+\infty$ sinon.

1. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(T = 2k)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{P}(S_{2n} \neq 0) = 2\mathbb{P}(S_{2n} > 0) = \mathbb{P}(T \leqslant 2n - 1)$.
3. On fixe $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbb{P}(T = 2k + 1)$.
4. Justifier que $(T < +\infty)$ est presque sûr, et donner une expression simple de la fonction génératrice de T.
5. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(S_{2n} = 0)$. On note $N = |\{n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = 0\}| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
6. En déduire $\mathbb{E}(N)$.
7. Montrer que N est presque sûrement égale à $+\infty$.

Exercice 87 (X) *** Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{k=1}^{2n} X_k\right|\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4n}{\pi}}.$$

Exercice 88 (X) ***

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = \dfrac{1}{2}$.

1. On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que pour tout $r > 0$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} > r\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{nr^2}{2}}$.
2. On pose $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ et l'on admet que $\int_{\mathbb{R}} G = 1$. Montrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{E}\big(Q(S_n)\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} QG$.

Exercice 89 (X) Soient X une variable aléatoire à support fini à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ et telle que $-X \sim X$, $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(\|S_n\|^2) = n\mathbf{E}(\|X\|^2)$ et $\mathbf{P}(S_{2n} = 0) = \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^2} \mathbf{P}(S_n = x)^2$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_{2n} = 0) \geqslant \dfrac{c}{n}$.