

Programme de colles - Semaine 14 - du 2/2 au 6/2

Probabilités discrètes : Tout le programme a été vu, nous avons commencé quelques compléments (sur les inégalités de concentration, les convergences de suites de variables aléatoires, les marches aléatoires), mais nous continuerons les compléments afin d'approfondir le cours, et continuerons la correction des exercices la semaine prochaine.

Variance, écart type et covariance : Si $E(X^2) < +\infty$, X est d'espérance finie. La notation $X \in L^2$ signifie que X^2 est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^2 .

Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2 , XY est dans L^1 et $E(XY)^2 \leq E(X^2) E(Y^2)$. Cas d'égalité.

Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X . Notations $V(X), \sigma(X)$. Variables réduites. Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.

Relation $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Relation $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Si $\sigma(X) > 0$, la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.

Covariance de deux variables aléatoires de L^2 . Relation $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Cas de variables indépendantes. Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorréliées.

Inégalités probabilistes et loi faible des grands nombres : Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n \geq 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors, pour tout

$\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, où $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $m = E(X_1)$. Utilisation des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev pour établir des inégalités de concentration.

Démonstration du théorème de Weierstrass avec les polynômes de Bernstein.

Fonction génératrice d'une la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) t^k$. La série entière définissant G_X est de rayon supérieur ou égal à 1 et converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1. Continuité de G_X . Détermination de la loi de X par G_X . La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $E(X) = G_X'(1)$. Utilisation de G_X pour le calcul de $E(X)$ et $V(X)$.

Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.