

Feuille d'exercices : Espaces vectoriels euclidiens

Produit scalaire, familles orthogonales et orthonormées

Exercice 1 * Soit E un espace vectoriel préhilbertien réel et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs unitaires telle que : $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{j=1}^p (u_j|x)^2$. Montrer que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une base de E .

Exercice 2 * Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E espace vectoriel euclidien. Établir les équivalences suivantes :

1. $\mathcal{B}$ est orthonormale.

$$3. \forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (e_i|x)^2.$$

$$2. \forall x \in E, x = \sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i.$$

$$4. \forall (x, y) \in E \times E, (x, y) = \sum_{i=1}^n (e_i|x)(e_i|y).$$

Exercice 3 (Mines) Pour tous $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^n b_k X^k$, on pose $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Trouver une base orthonormale de $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ pour ce produit scalaire.

Exercice 4 (Mines) On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on donne $n+1$ réels $a_0, \dots, a_n$.

1. Montrer que $(P, Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .

2. Montrer qu'il existe une unique base $B = (P_0, \dots, P_n)$ orthonormale telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tous les P_i sont de degré échelonné et les coefficients des X^i sont strictement positifs.

3. Déterminer l'expression de $P_i^{(k)}(a_k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4. Que se passe-t-il si $a_0 = \dots = a_n$?

Exercice 5 (Mines) On munit $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on ait $P(0) = \langle P, A_n \rangle$.

2. Montrer que A_n possède n racines simples dans $]0, 1[$.

Exercice 6 (Mines-Centrale)

1. Soit E un espace euclidien de dimension n et v un endomorphisme de E .

(a) Montrer que $\sum_{i=1}^n \langle v(e_i)|e_i \rangle$ ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ choisie.

(b) Montrer que $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v(e_i)|f_j \rangle^2$ ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ de E choisies.

(c) Calculer sa valeur lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r .

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\sigma(A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2$.

(a) Que vaut $\sigma(A)$ si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$? Et si A est la matrice dans la base canonique d'un projecteur orthogonal ?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\sigma({}^t \Omega A \Omega) = \sigma(A)$.

Exercice 7 (Centrale) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ espace euclidien ; soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable. Montrer que u est trigonalisable en base orthonormée.

Exercice 8 Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace vectoriel euclidien de dimension n .

1. Montrer qu'il existe dans E n vecteurs unitaires $(u_1, \dots, u_n)$ tels que :

$$\forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}, \quad \|u_i - u_j\| = 1.$$

2. Une telle famille $(u_1, \dots, u_n)$ est-elle une base de E ?

Exercice 9 (X-ENS SR) * Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une famille obtusangle d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$: pour tout $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$, $\langle x_i | x_j \rangle < 0$.

1. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.
2. Montrer l'existence, dans tout espace euclidien de dimension n , d'un $(n+1)$ -uplet vérifiant les hypothèses de la question précédente.
3. On suppose dans cette question que $\dim E = n+1$ et que la famille est libre. On considère $(e_j)_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ la base ON obtenue par orthonormalisation de Gram-Schmidt. Montrer que la matrice de passage des (x_j) aux (e_j) est à coefficients positifs.
4. On suppose dans cette question que $\text{rg}(x_0, \dots, x_n) = n$. Démontrer que toute famille $(x_j)_{j \in \llbracket 0, n \rrbracket \setminus \{k\}}$ de cardinal $n-1$ est libre et que l'expression de x_k dans cette famille a des composantes strictement négatives.
5. On suppose E de dimension n , les x_i de norme 1 et les produits scalaires deux à deux constants. Montrer que cette constante est égale à $-1/n$ et que la somme des x_i est nulle.

Exercice 10 (Ulm) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs tels que $\|e_k - f_k\|_2 < \frac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base. Le résultat subsiste-t-il si l'on suppose l'inégalité large ?

Exercice 11 (X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $v_1, \dots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien E . Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^n$ tels que

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| \leq \sqrt{n}.$$

Exercice 12 (X) * Soit N une norme sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E . On suppose qu'elle vérifie l'identité du parallélogramme. Montrer que N provient d'un produit scalaire.

Exercice 13 (X) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Déterminer les applications f de E dans $\mathbb{R}$, continues telles que pour tout $(x, y) \in E^2$, si x et y sont orthogonaux alors $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 14 (Ulm) Soit E un espace euclidien et (u_i) une famille de vecteurs telle que pour tout $i \neq j$, $\langle u_i | u_j \rangle \leq 0$. Montrer que la famille est indépendante si et seulement si il existe une forme linéaire ϕ sur E telle que pour tout i , $\phi(u_i) > 0$.

Projecteurs orthogonaux et distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 15 (CCINP) Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , D la droite engendrée par $u = \sum_{k=1}^n k e_k$.

1. Donner la matrice du projecteur orthogonal sur D dans la base e . Donner le polynôme caractéristique et le spectre de p .
2. Calculer la distance de $v = \sum_{k=1}^n e_k$ à D .

Exercice 16 (CCINP-Mines-Centrale) * Soit $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $\phi : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & (A|B) = \text{Tr}({}^t AB) \end{cases}$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j}) \in E$, $|\text{tr}(A)| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{(i,j)} a_{i,j}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. A quelle condition a-t-on égalité ?
3. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
4. Soit $A = (a_{i,j}) \in E$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques. Déterminer $\inf_{M \in \mathcal{S}_n} \sum_{i,j} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$.
5. Calculer la distance de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel et donner sa dimension.

7. Calculer la distance de la matrice ne comportant que des 1 à ce sous-espace vectoriel.
8. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et G l'ensemble des matrices scalaires $G = \{\lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$; trouver $G^\perp$ et calculer $d(M, G)$.

Exercice 17 (CCINP-Mines-Saint Cyr) On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $(f|g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$ est un produit scalaire.
2. Montrer que $F = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E, f'' = f\}$ sont orthogonaux. Sont-ils supplémentaires?
3. Déterminer le projeté orthogonal de $h \in E$ sur G .

Exercice 18 (X-Centrale-Mines) Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a \sin(t) + b \cos(t) - t)^2 dt$.

Exercice 19 (Centrale) Soit $\phi : (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(0)Q(0) + \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire.
On se place désormais dans l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \phi)$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.
3. On pose $F = \{Q \in \mathbb{R}[X], Q(0) = 0\}$. Montrer que l'inclusion précédente est stricte.

Exercice 20 (Paris) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$, $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur $\text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad \sum_{i=1}^m \langle u_i, x \rangle \langle x, p(v_i) \rangle = \|p(x)\|^2.$$

Isométries vectorielles

Exercice 21 (CCINP-Mines-Centrale-X) * Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre :

- (i) f préserve l'orthogonalité : $\forall (x, y) \in E^2, (x|y) = 0 \Rightarrow (f(x)|f(y)) = 0$.
- (ii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in E, \|f(x)\| = \alpha\|x\|$.
- (iii) Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $g \in O(E)$ tels que $f = \alpha g$.

Exercice 22 (SR) Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux produits scalaires sur E ; on note N_1 et N_2 les normes euclidiennes associées. On suppose :

$$\forall (x, y) \in V^2, \phi_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow \phi_2(x, y) = 0.$$

- (a) Montrer : $\forall (x, y) \in V^2, N_1(x) = N_1(y) \Rightarrow N_2(x) = N_2(y)$.
- (b) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $N_1 = c N_2$ et $\phi_1 = c^2 \phi_2$.
2. On munit V d'un produit scalaire. Soit $u \in L(V)$ telle que pour tout $(x, y) \in V^2, x$ et y sont orthogonaux si et seulement si $u(x)$ et $u(y)$ sont orthogonaux. Montrer que u est une similitude.

Exercice 23 (ENS-IMT)

1. Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer le nombre de matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $\mathbb{N}$ et de déterminant 1.

Exercice 24 (Mines-X) *

1. Soient E un espace euclidien, (a_i) et (b_i) deux familles de n éléments de E . Montrer l'équivalence entre :
 - (i) $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \langle a_i, a_j \rangle = \langle b_i, b_j \rangle$.
 - (ii) Il existe une isométrie vectorielle φ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi(a_i) = b_i$.
2. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $k \in \mathbb{N}^*, u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On suppose que, pour tous i, j dans $\{1, \dots, k\}, \langle u_i, u_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$. Montrer qu'il existe $W \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}, v_i = W u_i$.
3. Soit $(A, B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que ${}^t A A = {}^t B B$ si et seulement si il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P B$.

Exercice 25 (CCINP)

1. Dans l'espace euclidien orienté $E = \mathbb{R}^3$, soit r la rotation vectorielle d'angle θ autour de l'axe orienté dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u}$.

Montrer que : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \quad r(\vec{x}) = \cos(\theta) \cdot \vec{x} + \sin(\theta) \cdot (\vec{u} \wedge \vec{x}) + 2(\vec{u} \mid \vec{x}) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \vec{u}$.

2. Déterminer par plusieurs méthodes la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ d'axe dirigé par $\vec{a} = {}^t(1, -1, 0)$.

Exercice 26 (Mines) Soit u l'endomorphisme de l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ s'écrit :

$$R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour que u soit une rotation, il faut et il suffit que (a, b, c) soient les racines d'une équation du troisième degré :

$$u^3 - u^2 + p = 0 \quad (\text{avec } p \in [0, \frac{4}{27}]).$$

Dans le cas où cette condition est vérifiée, déterminer les éléments caractéristiques de la rotation.

Exercice 27 (CCINP) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par la matrice :

$$1. A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 & -3 \\ -\sqrt{6} & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28 (Mines) Soit $A = (a_{ij})$ orthogonale réelle de taille n . Montrer que $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$.

Exercice 29 (Mines) Soit E un espace euclidien. On considère σ une réflexion d'hyperplan H , et $u \in O(E)$.

1. On pose $f = u \circ \sigma \circ u^{-1}$. Étudier la nature de f .
2. Déterminer les éléments de $\mathcal{O}(E)$ qui commutent à toutes les symétries orthogonales.

Exercice 30 (Mines) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Pour $f \in \mathcal{O}(E)$, on pose $I(f) = \text{Im}(f - \text{Id})$ et $K(f) = \ker(f - \text{Id})$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, on note s_x la réflexion par rapport à $x^\perp$.

1. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que E est somme directe orthogonale de $I(f)$ et de $K(f)$.
2. Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Montrer que $I(s_{x_1} \circ \dots \circ s_{x_p}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 31 (Ulm) $SO_3(\mathbb{Q})$ est-il dense dans $SO_3(\mathbb{R})$?

Endomorphismes et matrices symétriques

Exercice 32 (CCINP-Mines) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soient $a \in E$ un vecteur unitaire et $k \in \mathbb{R}$. On considère $f : x \mapsto x + k\langle x, a \rangle a$.

Montrer que f est un endomorphisme symétrique. Pour quels k , f est-il inversible ? Orthogonal ? Trouver les valeurs propres de f et ses espaces propres.

Exercice 33 (CCINP) Soit E un espace euclidien et soient a et b deux vecteurs indépendants. On pose $u : x \in E \mapsto (a|x)b + (b|x)a$.

1. Montrer que u est un endomorphisme symétrique.
2. Trouver le noyau de u .
3. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de u .

Exercice 34 (CCINP) Soient $(u_j)_{1 \leq j \leq p}$ des endomorphismes symétriques tels que
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^p \text{rg}(u_j) = \dim E \\ \forall x \in E, \sum_{j=1}^p \langle u_j(x) | x \rangle = \langle x | x \rangle \end{cases}.$$

1. Montrer que $\sum_{j=1}^p u_j = \text{Id}_E$.

2. Montrer que $\bigoplus_{j=1}^p \text{Im } u_j = E$.
3. Montrer que cette somme est orthogonale.
4. Reconnaître les u_j .

Exercice 35 (CCINP-Mines) *

1. Montrer que si A est une matrice réelle, AA^T et $A^T A$ sont diagonalisables.
2. (Mines) Montrer que AA^T et $A^T A$ ont le même polynôme caractéristique.
3. (CCINP) Soient $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Montrer que MN et NM ont les mêmes valeurs propres et que les sous-espaces propres associés à une même valeur propre non nulle, ont même dimension (on n'utilisera pas le polynôme caractéristique). Montrer que AA^T et $A^T A$ ont les mêmes valeurs propres aux mêmes ordres.
4. Montrer que AA^T et $A^T A$ sont orthogonalement semblables (il existe U orthogonale telle que $AA^T = U A^T A U^T$).

Exercice 36 (Mines)

1. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice V orthogonalement semblable à U telle que $V^T V$ soit diagonale.
2. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.

Exercice 37 (CCINP) * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (avec multiplicités). Montrer que $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2$.

Exercice 38 (Mines) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ semblable à son inverse. Montrer que $\text{Tr}(A^2) \geq n$ et qu'il y a égalité si et seulement si A est une symétrie orthogonale.

Exercice 39 (X-Mines-ENS) * Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, de coefficients a_{ij} .

1. Montrer que $\det(A) \geq 0$ et que pour tout i , $a_{i,i} \geq 0$.
2. Montrer que $\det A \geq 0$ et $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$.
3. On suppose que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det M)^2 \leq \prod_{j=1}^n (\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2)$. On suppose M inversible. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 40 (ENS-X) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres respectives $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ et $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$. Montrer que $\text{Tr}(AB) \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$.
2. (ENS) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ (resp. $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_n$) les racines carrées des valeurs propres de ${}^t A A$ (resp. ${}^t B B$) comptées avec multiplicités. Montrer $|\text{Tr}(AB)| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$.

Exercice 41 (X-Centrale) * Soit E un espace vectoriel euclidien. On considère p et q deux projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
2. Montrer que $(\text{Im } p + \ker q)^\perp = \text{Im } q \cap \ker p$ et que $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(q) + \text{Im}(q) \cap \text{Ker}(p)$.
3. En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

Exercice 42 (X-Centrale) *

1. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, p et q des projecteurs orthogonaux, $x \in E$ tel que $p(x) = -q(x)$. Montrer que $p(x) = q(x) = 0$.
2. Soient f et g deux endomorphismes symétriques positifs de E tels que $\det(f + g) = 0$. Montrer que $\ker f \cap \ker g \neq \{0\}$.

Exercice 43 (X) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, p et q dans $\mathcal{L}(E)$ des projecteurs orthogonaux.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal si et seulement si p et q commutent.
2. Montrer que ces conditions sont satisfaites si et seulement si les valeurs propres de $p + q$ sont contenues dans $\{0\} \cup [1, +\infty[$.

Exercice 44 (X) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1(M) \geq \dots \geq \lambda_n(M)$ la suite ordonnée des valeurs propres de M . Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\lambda_1(A+B) \leq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i(A+B) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(A) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(B)$.

Exercice 45 (PLSR) * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \leq \sum_{i=1}^k a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_{n+1-i}.$$

Exercice 46 (Lyon) * Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de M (avec multiplicités) et $\lambda'_1 \leq \dots \leq \lambda'_n$ celles de M' , la matrice obtenue à partir de M en enlevant la première ligne et la première colonne. Montrer que $\lambda_1 \leq \lambda'_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda'_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda'_{n-1} \leq \lambda_n$.

w

Exercice 47 (Mines-Lyon) *

1. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable à spectre inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $\text{Sp}(AB) \subset [a_1 b_1, a_n b_n]$ où $a_1 = \min \text{Sp}(A)$ et $a_n = \max \text{Sp}(A)$ (et de même pour B).
3. Soient A, B, C dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On suppose que ABC est symétrique. Montrer que le spectre de ABC est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 48 (Lyon) Soient f et g deux endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable. On pourra commencer par le cas f inversible.

Exercice 49 (X) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda I_n - {}^t A A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lambda I_n - A {}^t A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 50 (X) Soit $V \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m > n$ telle que ${}^t V V = I_n$. Montrer que $I_m - V {}^t V$ est symétrique positive.

Exercice 51 (CCINP-Mines) *

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $(\det A)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(A)$. item Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, de déterminant égal à 1 ; montrer que $\text{Tr}(AB) \geq n(\det A)^{1/n}$.
2. (Mines) Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$. Montrer que $(\det AB)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \text{Tr}(AB)$.

Exercice 52 (X-Ulm) * Soient A et B dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, α et β dans $\mathbb{R}^+$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

1. Montrer que si A est définie positive alors il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = {}^t P P$ et $B = {}^t P D P$.
2. Montrer que $\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$.
3. Montrer que $(\det(I_n + A))^{1/n} \geq 1 + (\det A)^{1/n}$.
4. Montrer que $(\det(A + B))^{1/n} \geq (\det A)^{1/n} + (\det B)^{1/n}$.

Exercice 53 (Lyon) Soient $p \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{tr}(I_p - A^{-1}B) \leq \ln \left(\frac{\det A}{\det B} \right)$.
2. Soient $n \geq 1$, $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^p$ et $\lambda > 0$. Pour $1 \leq m \leq n$, on pose $A_m = \sum_{k=1}^m u_k u_k^T$ et $B_m = \lambda I_p + A_m$. Montrer que, pour $1 \leq m \leq n$, B_m est symétrique définie positive.
3. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A_n . Montrer que

$$\sum_{m=1}^n \langle u_m, B_m^{-1} u_m \rangle \leq \sum_{i=1}^p \ln \left(1 + \frac{\lambda_i}{\lambda} \right).$$

Exercice 54 (X) * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est définie positive lorsque ${}^t X A X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

1. * Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Montrer que la sous-matrice $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ est définie positive et que son déterminant D_k est strictement positif.
2. * On suppose que $D_k > 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que A est définie positive.

3. Soit $t \in]0, 1[$. Montrer que $A(t) = (t^{|i-j|})_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.

4. Montrer que $B = \left(\frac{1}{1 + |i-j|} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.

Exercice 55 (Mines) Soit $M = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que M est diagonalisable, puis que M appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. On note $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ le spectre ordonné de M . Montrer que, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1^t X X \leq {}^t X M X \leq \lambda_n^t X X$.

Exercice 56 (L) Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leq \dots \leq \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M .

1. On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.

2. Généraliser à $A_1, \dots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\sum_{i=1}^d A_i \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$.

Exercice 57 (ULSR)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$. À quelle CNS sur a , a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

2. Soit $(a, b, c) \in [-1, 1]^3$ tel que $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$.

Exercice 58 (Ulm-Centrale) * Pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $B \leq A$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A \leq B$ si et seulement si $\forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^t X A X \leq {}^t X B X$, et que $\leq$, définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer qu'une partie de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est bornée (pour une norme quelconque), si et seulement si elle est majorée et minorée au sens de $\leq$.

3. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, montrer que $X(A) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A \leq S\}$ et $Y(A) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), S \leq A\}$ sont convexes et fermés.

4. Que dire de $Z(A, B) = \{S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), A \leq S \leq B\}$?

5. Montrer qu'une suite croissante et majorée au sens de $\leq$, converge.

6. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})^2$ tel que $A \leq B$. Montrer que $\det A \leq \det B$.

Exercice 59 (Ulm) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout i , $a_{i,i} = 1$ et que, pour tous $i \neq j$, $|a_{i,j}| \leq 1/\sqrt{n}$. Montrer que le rang de A est supérieur ou égal à $n/4$. *Ind* : On pourra démontrer que pour une matrice symétrique non nulle $\text{rg}(A) \geq \frac{\text{Tr}(S)^2}{\text{Tr}(S^2)}$.

Exercice 60 (X) On appelle état de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de trace 1, à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$.

1. Caractériser les états S tels que $S^2 = S$. On les appelle les états purs.

2. Montrer que l'ensemble des états est une partie convexe de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que les points extrémaux de l'ensemble des états sont les états purs (un état est dit extrémal lorsqu'il ne peut s'exprimer comme barycentre à coefficients strictement positifs de deux états distincts).

Exercice 61 (X) Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$, E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + a(f')^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

2. Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $f \in E$ tel que $f(0) = v$.

3. Soit $v \in \mathbb{R}$. Déterminer $\inf \left\{ \int_0^{+\infty} (f^2 + a(f')^2) ; f \in E, f(0) = v \right\}$.

4. Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose : $A \leq B \Leftrightarrow B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note d'autre part $\sqrt{A}$ l'unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ d'une matrice $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A \leq B$. Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sqrt{A} \leq \sqrt{B}$.

Exercice 62 (Centrale)

1. Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Sp}(M) \subset \{0\}$ si et seulement si M est nilpotente. Est-ce toujours vrai pour $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$?

2. Soit V un sous-espace vectoriel regroupant des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\{0\}$. Montrer que $\dim(V) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
Cette majoration est-elle optimale ?

Exercice 63 (SR)

Soit A une matrice symétrique réelle.

- Que dire des valeurs propres et vecteurs propres de A . On notera $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .
- Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul, et u un réel. On pose $r = Ax - ux$. Montrer que $\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - u| \leq \frac{\|r\|}{\|x\|}$.
- On prend $(f_1, \dots, f_n)$ une base de vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Majorer $d(x, \text{Vect}(f_1, \dots, f_m))$ en fonction de m .
- On ne suppose plus A symétrique mais seulement diagonalisable réelle. On note toujours $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et on considère P une matrice inversible qui diagonalise A . Soit E une autre matrice réelle et soit u une valeur propre de $A + E$. Montrer que

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i - u| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|E\|.$$

Décompositions polaires et autres décompositions

Exercice 64 (X) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(T, O) \in T_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = TO$, où $T_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 65 (X) Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'il existe une unique matrice dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, notée $|T|$, telle que $|T|^2 = {}^t T T$.
- Montrer que $\ker T = \ker |T|$.
- Montrer qu'il existe une unique U dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que U réalise une isométrie vectorielle de $\text{Im}|T|$ dans $\text{Im}T$, U est nulle sur $\ker T$ et $T = U|T|$.

Exercice 66 (SR) * Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Rappeler que AA^T est diagonalisable à valeurs propres positives. On note $S(A)$ la suite décroissante des racines carrées des valeurs propres non nulles de AA^T (avec multiplicité).
- Comparer $S(A)$ et $S(A^T)$.
- Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et V dans $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telles que $U^T A V = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, avec $S(A) = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$.
- On considère $A^* = V R^* U^T$, avec $R^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
 - Que dire si A est carrée inversible ?
 - Sinon que dire de AA^* ?
 - Et que dire de A^*A ?

Exercice 67 (U) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U^* U = I_n$ et $A = U^* B U$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = O^T B O$.

Autour des matrices de covariance

Exercice 68 (SR) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ un vecteur aléatoire tel que $\mathbf{E}(\|X\|^2) < +\infty$. On note $C(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de covariance.

- Que dire de $C(X)$ si les X_i sont indépendantes ?
- Soient $v \in \mathbb{R}^n$ et $Y = \langle v, X \rangle$. Exprimer $\mathbf{V}(Y)$ en fonction de $C(X)$.
- On suppose les X_i centrées. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Z = AX$. Exprimer $\mathbf{E}(\|Z\|^2)$ en fonction de $C(X)$.
- Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un vecteur aléatoire X tel que $A = C(X)$.
- Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\mathbf{P}(X \in H) = 1$ si et seulement si $H^\perp \subset \ker(C(X))$.

Exercice 69 (Ulm) Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ un vecteur aléatoire sur un certain espace probabilisé, de composantes notées $X_1, \dots, X_d$ ayant toutes un moment d'ordre 2. On note $\text{Cov}(X) = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq d}$.

- Montrer que $\text{Cov}(X)$ est symétrique à valeurs propres positives.

- Réciproquement, montrer que toute matrice symétrique à valeurs propres positives est la matrice de covariance d'un certain vecteur aléatoire.
- Montrer que si $\det \text{Cov}(X) = 0$ alors il existe un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de $\mathbb{R}^d$ tel que $(X \in \mathcal{H})$ soit presque sûr.
- On suppose que X possède un moment d'ordre 4. Soit $(X^{(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi de X . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X^{(i)}$. Montrer que la suite de terme général $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X^{(i)} - M_n)(X^{(i)} - M_n)^T$ de matrices aléatoires converge en probabilité vers $\text{Cov}(X)$ (c'est-à-dire que, pour une norme arbitraire N sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, pour tout $\epsilon > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}(N(Y_n - \text{Cov}(X)) > \epsilon)$ converge vers 0).

Exercice 70 (X) Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un vecteur aléatoire réel. On note M la matrice des covariances des X_i c'est-à-dire $(\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

- Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.
- Soient $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ les valeurs propres rangées dans l'ordre décroissant de M et $(u_1, \dots, u_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés.
Montrer que $\mathbf{V}(\langle u_1, X \rangle) = \lambda_1$ est la borne supérieure sur les vecteurs v unitaires de $\mathbf{V}(\langle v, X \rangle)$.
- Montrer que $\mathbf{V}(\langle u_k, X \rangle) = \lambda_k$ est la borne supérieure sur les v unitaires de $\mathbf{V}(\langle v, X \rangle)$ avec l'hypothèse que $\langle v, X \rangle$ est non corrélé avec $(\langle u_1, X \rangle, \dots, \langle u_{k-1}, X \rangle)$.

Exercice 71 (ENS) Une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive lorsque $\forall Y \in \mathbb{R}^n, {}^t Y S Y \geq 0$.

- Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S est positive si et seulement s'il existe, sur un certain espace probabilisé, une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires réelles bornées telles que $s_{i,j} = \mathbb{E}(X_i X_j)$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.
- Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives. Montrer que $(a_{i,j} b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est positive.

Divers : endomorphismes antisymétriques...

Exercice 72 (Mines) Soient A antisymétrique et $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{r \rightarrow +\infty} A^r = L$. Montrer que $L = 0$.

Exercice 73 (ENS-Mines) Soit A une matrice antisymétrique réelle. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont imaginaires pures et que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Exercice 74 (X) Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 75 (X) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, {}^t X A Y = 0 \Rightarrow {}^t Y A X = 0$. Montrer que A est symétrique ou antisymétrique.

Exercice 76 (CCINP) Soit u un endomorphisme orthogonal de E euclidien.

- On pose $v = u - \text{Id}$; montrer que $\ker v = (\text{Im } v)^\perp$.
- Montrer que la suite de terme général $u_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n u^k(x)$ converge vers la projection orthogonale de x sur $\ker v$.

Exercice 77 (Mines) * Soient E un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$.

- Pour tout $z \in E$, montrer que $\|z\| = \sup_{y \in S(0,1)} \langle z | y \rangle$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de norme subordonnée $\|u\|$. Montrer que $\|u\| = \sup\{\langle u(x) | y \rangle, (x, y) \in E^2, \|x\| = 1, \|y\| = 1\}$.
- En déduire que $\|u\| = \|u^*\|$.
- Montrer que, si $f(x) = x$, alors $f^*(x) = x$.
- Montrer que $E = \ker(f - \text{Id}) \oplus \text{Im}(f - \text{Id})$.
- Étudier la limite quand n tend vers l'infini de $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$.

Exercice 78 (X-Mines-SR) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\text{SO}_n^*(\mathbb{R}) = \{M \in \text{SO}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \text{Sp}(M)\}$.

- Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \text{Sp}(A)$.
- On définit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -1 \notin \text{Sp}(M)\}$. On considère $f : A \in E \mapsto (A + I_n)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}), f(A) \in \text{SO}_n^*(\mathbb{R})$.
- Montrer que pour tout $S \in \text{SO}_n^*(\mathbb{R}), f(A) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

4. Montrer que $f(f(A)) = A$.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $M_x = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $f\left(M_{\tan(\frac{\theta}{2})}\right)$ pour $\theta \in]-\pi, \pi[$.

6. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$, il $P \in O_{2n}(\mathbb{R})$ et $x_1, \dots, x_n$ tels que pour $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale par blocs constituée des blocs $M_{x_1}, \dots, M_{x_n}$.

Exercice 79 (X) * Soit $A \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs 2×2 , où chaque bloc est antisymétrique inversible.

Exercice 80 (ULSR) On considère $\phi: (\mathbb{R}^4)^2 \rightarrow \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u, v) associe la matrice dont le coefficient en (i, j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.

1. Que peut-on dire si $\phi(u, v) = \phi(u', v') \neq 0$?
2. Que dire de la réciproque?
3. Montrer que A s'écrit comme $\phi(u, v)$ avec (u, v) libre ssi $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
4. Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

Exercice 81 (ULSR) Sur $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, on appelle Pfaffien l'application $Pf: A = (a_{i,j}) \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) \mapsto a_{1,2}a_{3,4} - a_{1,3}a_{2,4} + a_{2,3}a_{1,4}$.

1. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}), Pf(A)^2 = \det(A)$.
2. On admet que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), Pf(B^T AB) = \det(B)Pf(A)$.
3. Montrer que si $R \in SO_4(\mathbb{R})$ et $A = R^T - R$ alors :

$$A \in GL_4(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{Sp}(R) \cap R = \emptyset \Leftrightarrow Pf(A) \neq 0.$$

4. On considère $R_1, R_2 \in SO_4(\mathbb{R})$ et on pose $A_i = R_i^T - R_i$. On suppose $\chi_{R_1} = \chi_{R_2}$ et $Pf(A_1) = Pf(A_2)$. Montrer qu'il existe $P \in SO_4(\mathbb{R})$ tel que $R_1 = PR_2P^T$.

Exercice 82 (L) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle = \text{Tr}(X^T Y)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$ la norme associée.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$L: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ M & \mapsto (X \mapsto MX) \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbre injectif.

3. On note $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$ la norme triple associée à $\|\cdot\|_{\text{Tr}}$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\|L(M)\|_{\text{Tr}} \leq \|M\|_2$ (norme subordonnée à la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$).

Exercice 83 (ENS) On note $A = \{u \in \mathcal{L}(E), uu^*u = u\}$.

1. Montrer les équivalences entre : $(u \in A)$ et $(u^*u \text{ est un projecteur orthogonal})$.
2. Montrer que c'est également équivalent à $((\ker u)^\perp = \{x \in E, \|x\| = \|u(x)\|\})$.
3. Montrer que le groupe orthogonal est un ouvert et un fermé de A (on pourra d'abord vérifier qu'il est inclus dans A).

Exercice 84 (X) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = -I_{2n}$. Montrer l'équivalence : $M^T J \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T JM = J$.
2. On note $C = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), M^2 = -I_{2n} \text{ et } M^T J \in \mathcal{S}_{2n}^{++}(\mathbb{R})\}$. Montrer que pour tout $M \in C, M + J \in GL_{2n}(\mathbb{R})$.
3. Pour $M \in C$, on note $S_M = (M + J)^{-1}(M - J)$. Montrer que $S_M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ et que pour tout $X \neq 0, \|S_M X\|_2 < \|X\|_2$.
4. Montrer que pour tout $M \in C, S_M J + JS_M = 0$.

Exercice 85 (PLSR) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit G un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$. Pour tous $g \in G$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $g \cdot A = gAg^T$.

1. Donner un exemple de produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la norme N_0 euclidienne associée.
2. Soit $N: A \mapsto \sup_{g \in G} N_0(g \cdot A)$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $K = \{gg^T, g \in G\}$. Montrer qu'il existe un compact convexe C vérifiant : $K \subseteq C, \{g \cdot A, (g, A) \in G \times C\} \subseteq C$ et $C \subseteq \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
4. Montrer qu'il existe un produit scalaire G invariant pour $\cdot$.
5. La borne supérieure $\sup_{A \in C} \sup_{B \in C} \|A - B\|$ est-elle atteinte? Si oui, est-elle atteinte en un unique A_0 ?