

Programme de colles - Semaine 17 - du 16/2 au 20/2

Espace euclidien : le cours est plus ou moins terminé ; nous avons d'ores et déjà vu un certain nombre de compléments (autour de la décomposition polaire, de la décomposition en valeurs singulières et autres) mais les étudiants doivent savoir les redémontrer. Il manque encore quelques compléments et nous continuerons de corriger les exercices en début de semaine prochaine. Lundi et mardi, les étudiants manqueront peut-être encore de pratique et de recul. Les euclidiens seront encore au programme au retour des vacances, avec l'exponentielle d'endomorphismes.

Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien : Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée. Autre terminologie : endomorphisme symétrique. Notation $\mathcal{S}(E)$. Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints. Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E , alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u . Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs : Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E)$. Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Isométries vectorielles en dimension 2 : Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.

Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\text{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau. Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\text{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\text{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif. Classification des isométries d'un plan euclidien.

Réduction des isométries : Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie en base orthonormée. Interprétation matricielle. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3. La forme réduite justifie la terminologie *rotation*. La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.