

Feuille d'exercices : Exponentielle d'endomorphismes et de matrices

Exercice 1 (EIVP)

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est de rang 1, alors $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
2. Déterminer dans ce cas $\exp(A)$ (on distinguera les cas $\text{Tr}(A) = 0$ et $\text{Tr}(A) \neq 0$).
3. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 telles que $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent. Les matrices A et B commutent-elles ?

Exercice 2 (Centrale) Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$, puis $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

1. Calculer A^n .
2. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} et déterminer les solutions de $(E) : X' = AX$ de deux manières différentes.

Exercice 3 (Mines) Calculer $\exp \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $A^3 = A^2$. Calculer $\exp(A)$.
2. On suppose que $A^4 + A^3 - 2A^2 = 0$. Calculer $\exp(A)$.

Exercice 5 (Centrale) Soit $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\exp(A) = aI_2 + bA$.

Exercice 6 (Mines) Calculer $\exp(M)$ sachant que M est une matrice carrée réelle vérifiant $M^3 - 3M^2 + 3M - I_n = 0$.

Exercice 7 (Mines) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E tel que $(u - 3\text{Id}) \circ (u - \text{Id})^2 = 0$. Exprimer e^u en fonction de u .

Exercice 8 (X) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in (E)$ tel que $(u - \text{Id})^2 = 0$. Calculer e^u . Même question avec $(u - 2\text{Id})^2 = 0$.

Exercice 9 (X) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ annulé par $(X - 2)^3$. Comment calculer $\exp(u)$?

Exercice 10 (X) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $(u - 2\text{Id})^2(u - \text{Id}) = 0$. Calculer $\exp u$.

Exercice 11 (IMT-Mines) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $\exp M$ peut s'écrire sous forme polynômiale en M . Et montrer l'existence et l'unicité de E_M de degré strictement inférieur à celui de μ_M tel que $E_M(M) = \exp M$.
2. Si M est nilpotente, exprimer le polynôme E_M tel que $E_M(M) = \exp M$.
3. Si M est diagonalisable, montrer qu'il existe P inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$ et $\exp M = P(\exp D)P^{-1}$. On note λ_i , $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ les valeurs propres de M . Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{C}_{k-1}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$. Puis montrer que $E_M = L$.

Exercice 12 (Mines) * Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\ker A$ et $\ker(e^A - I_n)$.

Exercice 13 (Mines) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $(xA + yB)^n$. Puis calculer $\exp(xA + yB)$.
2. Montrer que $\{\exp(xA + yB), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$.

Exercice 14 (Centrale) On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie (P) si pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, il existe un sous-espace affine strict de $\mathbb{C}^n$ contenant $\{e^{tA}X, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Exemple : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, e^{tA} ; la matrice vérifie-t-elle (P) ?
2. Montrer que si $\det A = 0$ alors A vérifie (P) .
3. Quelles sont les matrices diagonalisables vérifiant (P) ?
4. Quelles sont les matrices vérifiant (P) ?

Exercice 15 (SR) On fixe un corps $\mathbb{K}$ et on pose $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$.

1. Montrer que H est un sous-espace affine de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$.
2. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$, et en déterminer le centre (c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les éléments de H).
3. On note $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{K}^3 \right\}$.
On définit $\star$ par $A \star B = A + B + \frac{1}{2}(AB - BA)$ pour A et B dans L . Montrer que $(L, \star)$ est un groupe et que l'exponentielle définit un isomorphisme de groupes de L vers H .
4. Calculer A^n pour $A \in H$ et $n \in \mathbb{N}$.
5. On prend $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que H est isomorphe au groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$ qui stabilisent le carré $C := \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$.

Exercice 16 (SR-ULSR) * On s'intéresse à l'ensemble des matrices toutes puissantes, i.e aux matrices $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $M = A^n$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

1. Traiter le cas $p = 1$.
2. Montrer que toute matrice M dont le polynôme caractéristique est scindé peut s'écrire sous la forme $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On note $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{U}_p(\mathbb{K}) = \{I_p + N, N \in \mathcal{N}_p(\mathbb{K})\}$ l'ensemble des matrices unipotentes :
Pour $U = I_p + N \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K})$, on définit $\ln(U) = \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{k-1} \frac{N^k}{k}$.
3. Montrer que $\ln$ de $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ est la bijection réciproque de $\exp$ de $\mathcal{N}_p(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{U}_p(\mathbb{K})$.
4. Quelles sont les matrices $U \in \mathcal{U}_p(\mathbb{K})$ toutes puissantes ?
5. Quelles sont les matrices M dont le polynôme caractéristique est scindé qui sont toutes puissantes ?

Exercice 17 (Mines) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, stable pour le produit et formé de matrices nilpotentes commutant deux à deux. On pose alors $U = \{I_n + N, N \in F\}$.

1. Montrer que U est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $M \mapsto \exp(M)$ est une bijection de F sur U .

Exercice 18 (Mines) * Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $L(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{M^k}{k}$. Montrer, pour toute matrice nilpotente $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, que $\exp(L(tN)) = I_n + tN$.

Exercice 19 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M}M = I_n$.

1. Soit $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ symétrique. En considérant les parties réelle et imaginaire de A , montrer que A s'écrit e^{iS} où $S \in S_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A s'écrit Oe^{iS} avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Exercice 20 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = \max\{\mathrm{Tr}(OM) ; O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}.$$

1. Justifier la définition de φ . Montrer que φ est continue.
2. Calculer $\varphi(M)$ lorsque $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, si φ atteint son maximum en O , alors $OM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (X) *

1. Soient $a_n \leq \dots \leq a_2 \leq a_1, b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$ et pour $\sigma \in \mathcal{S}_n, T_\sigma = \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)}$. Trouver $\max_{\sigma \in \mathcal{S}_n} T_\sigma$.

Soient A et B deux matrices symétriques de spectre respectif $a_n \leq \dots \leq a_1$ et $b_n \leq \dots \leq b_1$. On cherche $\max_{U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})} \mathrm{Tr}(AUBU^{-1})$.

2. Montrer que le maximum est bien atteint en un élément $U_0 \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

3. Conclure en considérant l'application $U : t \mapsto \exp(tH)U_0$ et en caractérisant les matrices C telles que $\text{Tr}(HC) = 0$ pour tout H antisymétrique réelle.
4. En déduire que $\text{Tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

Exercice 22 (Lyon) On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et on note $sl_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices de trace nulle.

1. Montrer que $\exp(sl_2(\mathbb{C})) \subset SL_2(\mathbb{C})$, mais que $\exp$ n'est pas surjective de $sl_2(\mathbb{C})$ dans $SL_2(\mathbb{C})$. Commencer par trouver un élément de $SL_2(\mathbb{C})$ qui n'a pas de racine carrée dans $SL_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\exp(sl_2(\mathbb{C})) = \{M \in SL_2(\mathbb{C}), \text{Tr}(M) \neq -2\} \cup \{-I_2\}$.

Exercice 23 (SR) On note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle, $SL_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de déterminant 1.

1. Montrer que $e^M \in SL_2(\mathbb{R})$ pour tout $M \in H$.
2. Montrer que $\text{Tr}(e^M) \geq -2$ pour tout $M \in H$.
3. A-t-on $\exp(H) = SL_2(\mathbb{R})$?
4. Montrer que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit d'une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
5. En déduire que toute matrice de $SL_2(\mathbb{R})$ est produit de deux exponentielles de matrices de H .

Exercice 24 (Lyon, SR) ** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. On pose $[A, B] = AB - BA$ et on suppose que $[A, B]$ commute avec A et B .

1. (SR) Montrer que $[A, B]e^A = e^A[A, B]$.
2. (SR) Montrer que $e^{tA}Be^{-tA} = B + t[A, B]$ pour tout réel t .
3. Montrer que $\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B]\right)$.
4. (SR) On pose $V = \text{Vect}(A, B, [A, B])$. Montrer que V est de dimension 3 si $[A, B] \neq 0$.
5. (SR) Montrer que $\{e^M, M \in V\}$ est stable par multiplication.

Exercice 25 (X) ** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que A et B commutent avec $[A, B] = AB - BA$. Exprimer $\exp(A+B)$. On pose $[A, B] = AB - BA$ et on suppose que $[A, B]$ commute avec A et B .

Exercice 26 (Mines) * Soient E un espace euclidien et u une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $SO(E)$. Montrer que u est un morphisme de groupes si, et seulement si, il existe un endomorphisme antisymétrique a de E tel que $u(t) = \exp(ta)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 27 (Lyon) ** Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{G} = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; \forall t \in \mathbb{R}, e^{tX} \in G\}$.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Que dire de $\mathcal{G}$ si $G = \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
3. Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathcal{G}$ est-il un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ?

Exercice 28 (X) ** Trouver les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall t \in \mathbb{R}, e^{tA} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 29 (X) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est *stochastique* si :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, m_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(tA)$ soit stochastique pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 30 (PLSR) Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que $-(A+A^T) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note (E) l'équation $AX + XA^T = BB^T$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $R = \int_0^{+\infty} e^{tA}BB^Te^{tA^T} dt$.
2. Montrer que R est la seule solution de (E).

Exercice 31 (Ulm) Montrer que la fonction $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{Tr}(e^S)$ est convexe.