

Feuille d'exercices : Intégrale sur un intervalle quelconque

Existence et calculs

Exercice 1 (CCINP-Mines-Centrale) Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x)(2+x)}$ sur $]0, \infty[$. | 4. $t \mapsto \frac{\operatorname{cht} t - \cos t}{t^{\frac{5}{2}}}$ sur $]0, 1[$. |
| 2. $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1, \infty[$. | 5. $t \mapsto \frac{\sin t}{\ln t}$ sur $[a, \infty[$. |
| 3. $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. | 6. $t \mapsto \frac{\ln t - \ln(1 - e^{-t})}{t} e^{-\alpha t}$ sur $]0, +\infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. |
| | 7. $t \mapsto \cos(t^2 + at + b)$ sur $[0, \infty[$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. |

Exercice 2 (CCPINP) On définit $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$.

1. Trouver les conditions sur (α, β) telles que I_1 soit définie.
2. Même question avec I_2 .
3. Tracer dans un repère (α en abscisses et β en ordonnées) les couples (α, β) qui rendent I_1 et I_2 définies.

Exercice 3 (Mines) Existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \ln(x)}{x} dx$.

Exercice 4 (Mines) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t |\cos t|^{t^5} dt$, $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x dx$ puis de $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^{x^\alpha} dx$ avec $\alpha \in]1, +\infty[$.

Exercice 5 (Mines) Soit $\alpha > 0$. Étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\right) - 1 \right) dx.$$

Exercice 6 (Mines) Soit f continue et T -périodique de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Montrer l'existence et l'unicité de λ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

Exercice 7 (Mines) Nature suivant $a \in \mathbb{R}$ de $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^a} dx$? Calculer $I(5/2)$.

Exercice 8 (Mines) Soit $a > 0$. Montrer que l'intégrale : $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(ax) + \arctan(x/a)}{1+x^2} dx$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 9 (Mines-Centrale) Vérifier l'existence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$. | 4. $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} dx$. |
| 2. $\int_1^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$. | 5. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt$. |
| 3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$. | 6. $\int_1^{+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^2} dx$. |

Exercice 10 (X) Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2 + \lfloor \frac{1}{t} \rfloor}$.

Exercice 11

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, $e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}$.

- Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$ $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\infty \frac{dt}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} = \sqrt{n}W_{2n-2}$ et $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \sqrt{n}W_{2n+1}$, avec (W_n) les intégrales de Wallis.
- Après avoir démontré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Exercice 12 (*Mines-Centrale*)*

- Existence et calcul, pour $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} dt$ (on pourra calculer la différence de deux termes consécutifs).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - I_n = 0$.
- En déduire $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Lien avec les séries

Exercice 13 (*X-Mines*) *

- Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 avec f' intégrable. Montrer que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f$ converge.
- Nature de $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}$, $\sum \frac{\cos \sqrt{n}}{n}$, $\sum \frac{\cos(\ln n)}{n}$, $\sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$?

Exercice 14 (*Mines*)

- Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Nature de $\sum u_n^2$?
- Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur \mathbb{R}^+ . Nature de $\int_0^\infty f^2$?

Exemple et contre-exemple

Exercice 15 (*Mines*) *

- Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto x f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
- Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto x f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 16 (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante.

- On suppose que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
- Étudier la réciproque.

Exercice 17 (*Mines*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f' est bornée et $\int_{\mathbb{R}} f$ converge. Montrer que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.

Exercice 18 (*Mines*) Soient $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 , ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell_1$ et $x f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell_2$. Que vaut ℓ_2 ?

Méthodes classiques

Exercice 19 (*Mines*) * Soient $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge pour tout $s \geq s_0$.

Exercice 20 (*SR*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ continue tel que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$. On note $g : y \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_y^{+\infty} f(x) dx$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} g(x)dx \in [0, +\infty]$.
2. On suppose dans la suite que f est décroissante. Montrer qu'il existe un unique $m > 0$ tel que $\int_0^m f(x)dx = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx \geq m$.
4. Peut-on avoir égalité?

Exercice 21 (*X*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable, de classe \mathcal{C}^1 , telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

1. Donner le tableau de variations de f .
Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^m f(t) dt = \frac{1}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
3. Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

Exercice 22 (*Ulm-Centrale-Mines*)* Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge.

1. Justifier l'existence de $\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$, pour $\epsilon > 0$.
2. Calculer $l = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(t)}{t} dt$.
3. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et en calculer la valeur.
4. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ et $\int_0^{\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ convergent et calculer leur valeur.
5. Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \neq b$. Calculer $\int_0^{\infty} \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx$.
6. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$.
7. Montrer que $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt = -\ln 2$.

Exercice 23 (*Mines*) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, admettant une limite ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer l'existence et calculer pour $a < b$ l'intégrale $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+a) - f(t+b)) dt$.

Limites et équivalents

Exercice 24 (*X*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge et telle que $x \mapsto \int_x^{x+1} f'^2$ est bornée. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Exercice 25 (*Centrale*)* Équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 26 (*Paris*) Déterminer la limite de $\frac{1}{A} \int_1^A A^{1/x} dx$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 27 (*Lyon*) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx = +\infty$.

Exercice 28 (*Paris*) Soit f une fonction continue et de carré intégrable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt$.

Exercice 29 (*Mines*)*

1. Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$.
2. Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{it^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 30 (*Lyon*)* Soit f une fonction continue par morceaux et croissante de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Montrer :

$$\int_0^1 f(x)e^{i\lambda x} dx \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Exercice 31 (*Mines*) Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Justifier que cette fonction est bien définie et donner son intervalle de définition. Y est-elle intégrable ?

Exercice 32 (*Mines*) Soit f une fonction continue par morceaux et de carré intégrable de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 33 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que pour un certain $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda}{t}.$$

1. Selon les valeurs de λ , f est-elle intégrable sur \mathbb{R}_+ ?
2. Dans le cas où f est intégrable, donnez un équivalent simple des restes ; dans l'autre cas, donnez un équivalent simple des intégrales partielles.

Exercice 34 (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que f'/f tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^{-*}$ en $+\infty$.

1. Montrer que f et f' sont intégrables sur \mathbb{R}^+ .
2. Donner un équivalent de $\int_x^{+\infty} f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Inégalités et égalités

Exercice 35 (*Mines-Centrale*) On note $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f^2 \text{ et } f''^2 \text{ sont } \mathbb{R}_+ \text{-intégrables}\}$. Soit $f \in E$.

1. * Montrer que ff'' est intégrable sur \mathbb{R}_+ .
2. * En déduire que f'^2 est intégrable sur \mathbb{R}_+ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)f'(x) = 0$.
3. * Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^2 = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x))^2 = 0$.
4. * Dans le cas où f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur \mathbb{R} , montrer que f'^2 est intégrable sur \mathbb{R} et $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|f''\|_2$.
5. Pour tout $g \in E$, on définit $J(g) = \int_0^{+\infty} (g^2 - g'^2 + g''^2)$. Montrer en le déterminant que J admet un minimum sur E . On pourra utiliser que $(g + g' + g'')^2 = (g^2 - g'^2 + g''^2) + 2(g + g')(g' + g'')$.
6. Soit $f \in E$. Montrer que $\|f'\|_2^2 \leq 2\|f\|_2 \|f''\|_2$. On pourra utiliser $x \mapsto f(\mu x)$.

Exercice 36 (*Mines*)

1. On note L^2 le sous-espace des f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable sur \mathbb{R}^+ . Montrer que L^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que f, f', f'' appartiennent à L^2 . Montrer que f' et f ont une limite réelle que l'on précisera en $+\infty$.
3. Avec les notations de (b), montrer que $\int_0^{+\infty} (f''^2 - 4f'^2 + 16f^2) \geq 0$ et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 37 (*Centrale*)*

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables, muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Soit $a > 0$. Pour $f \in E$, on définit $\phi(f) = g$ par $g(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt$. Montrer que g est intégrable.

Puis montrer que ϕ est un endomorphisme continu de E i.e. : $\exists M > 0, \forall f \in E, \|\phi(f)\|_1 \leq M\|f\|_1$.

2. On se place maintenant sur l'espace F des fonctions de carré intégrable muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Étudier la même question dans ce cas.

Exercice 38 (Centrale-X) * Soit E l'espace vectoriel constitué des fonctions continues de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} de carré intégrable

que l'on munit de la norme définie par $\|f\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{1/2}$.

Pour $f \in E$, on pose $\phi(f) = g$, où $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$.

1. Montrer que $T(f)$ est continue.

2. Soit $A > 0$. Montrer que

$$\int_0^A Tf(x)^2 dx \leq 2 \int_0^A \frac{f(x)}{x} \left(\int_0^x f \right) dx.$$

En déduire que $Tf \in E$ et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$ (*).

3. Déterminer $\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(f)\|}{\|f\|}$. On pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$.

Exercice 39 (Mines-X) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que f'^2 est intégrable. Montrer que l'application $t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable.

Exercice 40 (ENS) Soit $p > 1$.

1. Démontrer l'inégalité de Hölder.

2. Soit f continue sur \mathbb{R}_+ , positive, telle que f^p soit intégrable sur \mathbb{R}_+ . On pose $F : x > 0 \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer

que F^p est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et que $\int_0^{+\infty} F^p \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f^p$.

Exercice 41 (Paris) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable et $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2.$$

Exercice 42 (Mines) Soit $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Soient $I_1 = \int_0^1 (1 + \cotan^2(\pi t)) f(t)^2 dt$ et $I_2 = \int_0^1 f'(t) f(t) \cotan(\pi t) dt$. Montrer la convergence de I_1 et I_2 .

Trouver une relation entre I_1 et I_2 .

2. Montrer que $\int_0^1 f'(t)^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt$ et étudier le cas d'égalité.

Autour de la formule des résidus

Exercice 43 (Mines-X) * Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$. On suppose que Q n'a pas de racines réelles ; on notera Z l'ensemble de ses racines.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Montrer l'existence et donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-z)^k}$.

2. Montrer l'existence de la limite quand r tend vers l'infini de $\int_{-r}^r \frac{dt}{t-z}$, et en donner la valeur.

3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ converge et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = i\pi \sum_{z \in Z} \epsilon(z) \alpha(z),$$

avec $\epsilon(z)$ le signe de la partie imaginaire de z , et $\alpha(z)$ le coefficient devant $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$.

4. Dans le cas où P et Q sont des polynômes des $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = 2i\pi \sum_{z \in Z_+} \alpha(z),$$

où Z_+ est l'ensemble des racines de Q dans le demi-plan supérieur de \mathbb{C} .

5. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(t+1)}{(t^2+1)^2} dt$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$.

Exercice 44 (X) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier la convergence de l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|) dt$, puis la calculer en fonction de $P(0)$ et des racines de P de module strictement inférieur à r .