

Feuille d'exercices : Équations différentielles linéaires

Résolution explicite d'équations différentielles linéaires

Exercice 1 (CCINP-Mines) Résoudre les systèmes différentiels linéaires :

- | | |
|---|--|
| 1. $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$ | 4. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases}$ |
| 2. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z \end{cases}$ | 5. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1 \end{cases}$ |
| 3. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$ | 6. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$ |

Exercice 2 (CCINP-ENTPE-EIVP) Résoudre :

- | | |
|--|--|
| 1. $(x^2 + 1)y' - 2xy = xe^{\frac{1}{1+x^2}}$ | 4. $x(x^2 - 1)y' + 2y = x \ln(x) - x^2$ |
| 2. $y' - \tan xy = -\cos^2 x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ | 5. $\cos x y' - \sin x y - \cos^3 x = 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis sur $[0, \pi]$. |
| 3. $y' \cos^3 x + y \cos(3x) = e^{-4x} \sin x$ | |

Exercice 3 (IMT-CCINP)

1. Résoudre $x \ln |x| y' + y = x \sin x$.
2. Existe-t-il des solutions sur $] -1, 1[$? Sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice 4 (Centrale) Intégrer l'équation différentielle : $2xy' + y = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 5 (CCINP) Résoudre $(1 - x^2)y'' - 3xy' - y = \frac{x}{\sqrt{|1 - x^2|}}$.

On pourra remarquer que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|1 - x^2|}}$ est solution de l'équation homogène.

Exercice 6 (CCINP-ENTPE-EIVP) (*Variations des constantes*) Résoudre :

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 1. $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{1 + t^2}$ | 3. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$ |
| 2. $t^2 y'' + ty' - y = 2t$ sur $\mathbb{R}_+^*$. | 4. $y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)e^x$. |

Exercice 7 (CCINP-Mines-ENTPE-EIVP) *

1. (ENTPE) Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f''(x) + f(-x) = \cos(x)$.
2. (CCINP) Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.
3. (Mines) Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f(-x) = e^x$.

Exercice 8 (CCINP) * Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, u une application de classe $\mathcal{C}^k$ de I dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, soit $L_u(f) = f' + uf$.

1. Montrer que L_u est linéaire. Calculer $L_u \circ L_u$.
2. Résoudre $y'' + 2xy' + (1 + x^2)y = 0$.

Exercice 9 (Mines)

1. Soient $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et M la matrice de coefficients $M_{ij} = a_j$ si $i = n$, $M_{ij} = 1$ si $j = i + 1$ et $M_{ij} = 0$ sinon.

Calculer χ_M , déterminer la dimension des espaces propres et trouver une CNS pour que M soit diagonalisable.

2. Mettre l'équation différentielle $y''' = y'' + y' - y$ sous forme matricielle $Y' = AY$ puis la résoudre.

Exercice 10 (IMT) *

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, par la méthode de variation des deux constantes, $y'' + y = \frac{1}{x}$ (on pourra utiliser $\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$).
2. En déduire une expression de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$, pour $x > 0$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 11 (CCINP) Sachant que l'équation admet deux solutions inverses l'une de l'autre, résoudre sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$: $(1 - \cos(4x))y'' + 2\sin(4x)y' - 8y = 0$.

Exercice 12 (Mines) Résoudre l'équation différentielle $4xy'' + 2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ sachant que, sur chaque intervalle, il existe une fonction f solution ne s'annulant pas et telle que $\frac{1}{f}$ soit également solution ; résoudre sur $\mathbb{R}$.

Séries entières et équations différentielles linéaires

Exercice 13 (CCINP)

1. Solutions développables en série entière de $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$.
2. Calculer les sommes des séries trouvées.
3. Décrire un moyen permettant d'obtenir les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

Exercice 14 (CCINP)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = \frac{x^{3n}}{(3n)!}$, et $u_0(x) = 1$.

1. Donner le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x)$.
2. Montrer que S vérifie une équation différentielle du type $y'' + ay' + by = f$ où l'on précisera f et les réels a et b . Intégrer l'équation et en déduire S .

Exercice 15 (Mines)

1. Soit (E) l'équation différentielle $xy'' + y' - xy - 1 = 0$. Trouver les solutions de (E) développables en série entière sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $x \mapsto \int_0^{\pi/2} e^{-x \sin(t)} dt$ est solution de (E) .
3. En déduire $\int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 (Mines) Chercher les solutions développables en série entière puis résoudre complètement les équations différentielles linéaires :

- | | |
|--------------------------------|--|
| 1. $4xy'' - 2y' + 9x^2y = 0$. | 4. $y'' + xy' + 3y = 0$. |
| 2. $xy'' + 2y' - xy = 0$. | 5. $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$. |
| 3. $4xy'' + 2y' - y = 0$. | 6. $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$. |

Exercice 17 (X) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la dimension de l'espace des solutions de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ développables en série entière au voisinage de 0.

Étude qualitative de solutions d'EDL d'ordre 2

Exercice 18 (TPE)

1. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = e^{-\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^+$ sont les $x \mapsto a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^x \sin(x-t)e^{-\sqrt{t}} dt$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'une seule des solutions admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 19 (Mines) Soit (E) l'équation différentielle $\forall x \in \mathbb{R}^+, y'' - y = |\cos(x)|$. Existe-t-il des solutions positives ? bornées ? positives et bornées ?

Exercice 20 (Mines) * Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, monotone et de limite finie en $+\infty$, montrer que les solutions de $y'' + y = f$ sont bornées.

Exercice 21 (Mines) * Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On considère $(E) : y'' + y = f(x)$.

1. Montrer que $y_1 : x \mapsto \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt$ est solution.
2. En déduire la forme générale des solutions.
3. Dans le cas où f est T -périodique, (E) admet-elle des solutions T -périodiques ?

Exercice 22 (CCINP) *

1. Résoudre $y'' + 4y = 0$
2. Montrer que $h(x) = \frac{1}{2} \int_0^x g(t) \sin(2x-2t) dt$, où g est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est solution de $y'' + 4y = g(t)$ puis résoudre cette équation différentielle.
3. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'' + 4f \geq 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$.

Exercice 23 (Mines) *

1. Résoudre $y'' - y = \frac{2}{\operatorname{ch}^3(x)}$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) - f(x) \geq \frac{2}{\operatorname{ch}^3(x)}$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.

Exercice 24 (Mines)

1. Soit $q \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$; montrer qu'une solution non nulle de $y'' - qy = 0$ a au plus un zéro dans $\mathbb{R}_+$.
2. Soit y l'unique solution maximale vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$; montrer que $y(t) \geq 1+t$ pour tout $t \geq 0$.
3. Montrer que $g(t) = y(t) \int_t^{+\infty} \frac{du}{y^2(u)}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle. Montrer que g est bornée
4. Qu'en déduire pour h si h est une solution bornée de l'équation ?

Exercice 25 (Centrale) Soient $q \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

1. Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$. Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
2. Soient u et v les solutions de (E) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1 \end{cases}$$

Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $]a, +\infty[$, $\frac{u}{v}$ et $\frac{u'}{v'}$ sont monotones de monotonies contraires. Montrer que $\frac{u}{v}$ et $\frac{u'}{v'}$ tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

3. Montrer qu'il existe une unique solution g de (E) , strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $[a, +\infty[$.
4. Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $[1, +\infty[$.
On pourra poser $y(x) = xz\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 26 (CCINP-Centrale) On considère $(E) xy'' + y' + y = 0$.

1. Montrer qu'il existe une solution f de (E) développable en série entière vérifiant $f(0) = 1$.
2. Montrer que f ne s'annule qu'une fois sur $]0, 2[$ en un point x_0 . Et vérifier que pour tout $x \in]0, x_0[$, $f(x) > 0$. (suite : Centrale).
3. Montrer que $x \mapsto xf'(x)^2 + f(x)^2$ admet une limite finie en $+\infty$ que l'on notera l .
4. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$ et que f' tend vers 0 en $+\infty$.
5. Montre l'existence des intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{f'(x)f(x)}{x} dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)^2}{x} dx$.

6. Déterminer la valeur de l .

Exercice 27 (Centrale)

1. Montrer que $(E) : x''(t) + f(t)x(t) = 0$, où f est continue et 1-périodique, admet deux solutions u et v indépendantes telles que $u(0) = v'(0) = 1$, $v(0) = u'(0) = 0$.
2. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) & u'(t) \\ v(t) & v'(t) \end{pmatrix}$; montrer l'existence d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X(t+n) = M^n X(t)$. Calculer $\det M$.
On suppose désormais que M admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 .
3. Montrer que l'une au moins est de valeur absolue strictement supérieure à 1. Montrer qu'il existe un couple de solutions (z_1, z_2) tel que : $z_1(t+1) = \lambda_1 z_1(t)$ et $z_2(t+1) = \lambda_2 z_2(t)$.
En déduire l'existence d'une solution non bornée.
4. Montrer l'existence de solutions de (E) de la forme $\phi(t)e^{mt}$ et $\psi(t)e^{-mt}$ où m est un complexe, ϕ et ψ de classe $\mathcal{C}^2$ et 1-périodiques.

Exercice 28 (Mines) Soient a et b deux fonctions continues et 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, E l'espace des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $y \in E \setminus \{0\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+1) = \lambda y(t)$.

Exercice 29 (Mines) Soient u une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, f une solution de l'équation différentielle $y'' + (1+u)y = 0$. Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) = f(x) + \int_0^x \sin(x-t)u(t)f(t) dt$.

1. Former une équation différentielle linéaire vérifiée par g .
2. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq c + \int_0^x |u(t)f(t)| dt$.
3. Montrer que f est bornée.

Exercice 30 (X) Soit $q \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que q' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $q(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Montrer que les solutions de $y'' + (q+1)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 31 (X)

On considère $q \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_-)$ et $(x_1, x_2) \in I^2$ (deux points distincts). Soit l'équation : $(S) \begin{cases} y'' + qy = 0 \\ y(x_1) = a \text{ et } y(x_2) = b \end{cases}$

1. Quelle est la dimension de $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{S}, y(x_2) = 0\}$? Montrer que si $b = 0$, alors pour tout a , (S) a une unique solution.
2. Montrer que cette unique solution est monotone.
3. Montrer l'existence et l'unicité de la solution pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 32 (X)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(\pi) = 0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2 \leq \frac{\pi^2}{8} \int_0^\pi (f')^2$.
2. Soit $f, q \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0, \pi], q(x) < \frac{8}{\pi^2}$. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $y \in \mathcal{C}^2([0, \pi], \mathbb{R})$ telle que $y'' + qy = f$, $y(0) = a$, $y(\pi) = b$.

Exercice 33 (SR) * Soient I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$.

1. Soit x une solution non nulle de (E) . Montrer que les zéros de x sont isolés.
2. On suppose a de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe z de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}$, et $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue telles que $x \mapsto [t \mapsto x(t)e^{z(t)}]$ définisse une bijection de l'ensemble des solutions de (E) sur celui des solutions de $y'' + q(t)y = 0$.
3. Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y'' + q_i(t)y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I . Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs de y_1 . Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
4. Soient $q : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs d'une solution non nulle de $y'' + q(t)y = 0$. Montrer que

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}.$$

Exercice 34 (X) * Soient q_1, q_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $q_1 \leq q_2$. On considère l'équation différentielle $(E_i) : y'' + q_i(t)y = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$.

1. Soient y_1, y_2 des solutions respectives de (E_1) et (E_2) sur I . Soient $\alpha < \beta$ deux zéros de y_1 . Montrer que y_2 s'annule dans $[\alpha, \beta]$.
2. Soient $q : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, m, M deux réels strictement positifs tels que $m \leq q \leq M$. Soient $\alpha < \beta$ deux zéros consécutifs d'une solution non nulle x de $y'' + q(t)y = 0$.
 - (a) Montrer que les zéros de x forment une suite strictement croissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - (b) Montrer que $\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq t_{n+1} - t_n \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 35 (X) * On considère f une solution non identiquement nulle de $y'' + e^t y = 0$.

1. Montrer que les zéros de f sont des points isolés.
2. Montrer que f a une infinité de zéros sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier qu'on puisse définir (a_n) la suite ordonnée des zéros de f et que cette suite tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\pi e^{-\frac{a_{n+1}}{2}} \leq a_{n+1} - a_n \leq \pi e^{-\frac{a_n}{2}}$.
Indication : on pourra introduire $\phi_n : t \mapsto \sin\left(e^{\frac{a_n}{2}}(t - a_n)\right)$.
5. En déduire un équivalent de a_n .

Exercice 36 (SR) On considère l'équation différentielle

$$(D_\lambda) : y'' + (\lambda - r)y = 0$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $r \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, avec I un intervalle contenant $[0, 1]$. On considère E_λ l'espace des solutions y de (D_λ) telles que $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

1. Quelles sont les dimensions possibles de E_λ ?
2. Caractériser le cas $\dim(E_\lambda) = 1$. (On souhaite une condition portant sur y_λ , solution du problème de Cauchy (D_λ) , $y_\lambda(0) = 0$, $y'_\lambda(0) = 1$.)
3. Montrer que les E_λ sont orthogonaux pour $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg$ (à r fixé).
4. On pose N_λ le nombre de zéros de y_λ sur $[0, 1]$. Pourquoi est-ce fini ?
5. Calculer N_λ dans le cas $r = 0$, $\lambda > 0$.
6. Dans le cas général, étudier le comportement de N_λ .

Étude qualitative de solutions d'EDL d'ordre 1

Exercice 37 (Centrale) Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, bornée. Étudier l'existence et l'unicité de solutions bornées de $y' - y = f(x)$.

Exercice 38 (Mines)

1. Soient $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\phi \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telles que $f' + f = \phi$; exprimer f en fonction de ϕ .
2. On suppose ϕ de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$; montrer que f est bornée et de carré intégrable.
3. Montrer que f tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Obtient-on les mêmes conclusions si on suppose $\int_0^\infty |\phi(t)| dt < +\infty$?

Exercice 39 (X) * Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f^2$ converge. Montrer que l'équation différentielle $y' - ay = f$ admet une unique solution de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 40 (Mines) Soient $T \in \mathbb{R}^{+*}$, a et b deux fonctions continues et T -périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer les solutions T -périodiques de $x' = ax + b$.

Étude qualitative de solutions d'équations linéaires scalaires

Exercice 41 (Centrale-Mines-ENS) *

1. Soit $a < 0$ (où a complexe de partie réelle strictement négative) et f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) - af(x) = l$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{l}{a}$.

2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
Que peut-on dire des limites de f' et f'' ?
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x) + bf'(x) + cf(x) = l$, avec $P = X^2 + bX + c$ qui est scindé à racines complexes de parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{l}{c}$. Que peut-on dire des limites de f' et f'' ?

Exercice 42 (ULSR) *

1. On suppose que $f'' + f' + f \xrightarrow{+\infty} 0$. Montrer que $f \xrightarrow{+\infty} 0$.
2. Soit $P = \sum_{k=0}^2 a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 1 ou 2 et à racines simples dans $\mathbb{C}$. On pose $\partial_P f = \sum_{k=0}^2 a_k f^{(k)}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur P pour que si $\partial_P f \xrightarrow{+\infty} 0$, alors $f \xrightarrow{+\infty} 0$.
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} = l$, avec $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ polynôme scindé à racines complexes de parties réelles strictement négatives. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{l}{a_0}$. Que peut-on dire des limites des $f^{(k)}$?

Exercice 43 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$, $f_1, \dots, f_n$ des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 0 en $+\infty$ telles que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f'_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} f_j$. Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 44 (ULCR) * On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $\sum_{k=0}^n y^{(k)} = 0$.
À quelle condition sur n tout élément de $\mathcal{S}$ vérifie-t-il $y(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$?

Exercice 45 (Ulm) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_r \in \mathcal{C}^r(I, \mathbb{R})$. On pose $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_r)$ le Wronskien de $f_1, \dots, f_r$. On note $W_r(f_1, \dots, f_r) = \det(\mathcal{W}(f_1, \dots, f_r))$.

1. Soit $g \in \mathcal{C}^{r-1}(I, \mathbb{R})$. Montrer que $W_r(gf_1, \dots, gf_r) = g^r W_r(f_1, \dots, f_r)$.
2. On suppose que, pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $W_k(f_1, \dots, f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1 f_1 + \dots + a_r f_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I .
3. On suppose que W_r est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1, \dots, f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1, \dots, f_r)$ est liée.

Étude qualitative de solutions d'EDL vectorielles

Exercice 46 (CCINP-Centrale) * Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que toutes les solutions X de $X' = AX$ décrivent des cercles ($\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ forme un cercle de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire l'intersection d'un plan et d'une sphère).

Exercice 47 (Centrale) * Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive. Soit X une solution de $X' = AX$ non identiquement nulle.

1. Montrer que la fonction $t \mapsto \|X(t)\|$ est croissante (on considère la norme euclidienne).
2. Montrer que cette fonction réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 48 (Mines) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $T \in \mathbb{R}^{+*}$, E l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}^n$. Pour $Y_0 \in \mathbb{R}^n$ et $U \in E$, on note $Y_{Y_0, U}$ l'unique solution du problème de Cauchy $Y(0) = Y_0$, $\forall t \in [0, T], Y'(t) = AY(t) + BU(t)$.

1. Montrer que, si $t \in [0, T]$, il existe $\phi_t \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que :
 $\forall (Y_0, U) \in E \times \mathbb{R}^n, Y_{Y_0, U}(t) = e^{tA} Y_0 + \phi_t(U)$.
2. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
(i) $\forall Y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E, \phi_T(U) = Y_1$;
(ii) $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n, \exists U \in E, Y_{Y_0, U}(T) = 0$;
(iii) l'image de ϕ_T est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 49 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $S \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction M de $\mathbb{R}$ dans $S_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $M(0) = I_n$ et que $\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = SM(t)S$. La fonction M est-elle bornée ?

Exercice 50 (SR) Soient A une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M l'unique application dérivable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(0) = I_n$ et $\forall t \in \mathbb{R}^+, M'(t) = A(t)M(t)$. Montrer :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \det(M(t)) = \exp \left(\int_0^t \text{Tr } A \right).$$

Exercice 51 (ENS) $(E) : Y'(t) = A(t)Y(t)$. On suppose que $t \mapsto \|A(t)\|$ est $\mathbb{R}_+$ -intégrable. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note Z_x l'unique solution telle que $Z_x(0) = x$.

1. Montrer que Z_x est bornée (on pourra utiliser le lemme de Gromwall) et a une limite en $+\infty$, notée $l(x)$.
2. Montrer que $\phi : x \mapsto l(x)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ (on pourra calculer son déterminant grâce au Wronskien).

Exercice 52 (X)

1. Soient $f, g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et K un réel strictement positif. On suppose que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t f(u) \, du$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq g(t) + K \int_0^t e^{K(t-u)} g(u) \, du$.
2. Soient $A, B : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des fonctions continues, et $M, N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, M'(t) = A(t)M(t), N'(t) = B(t)N(t)$ et que $M(0) = N(0) = I_n$. On suppose de plus que $\|A(t)\| \leq K$ et $\|A(t) - B(t)\| \leq \eta$ pour tout $t \in [0, T]$, où K, η, T sont des réels strictement positifs, et $\| \cdot \|$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, $\|M(t) - N(t)\| \leq e^{Kt} (e^{\eta t} - 1)$.

Exercice 53 (SR) * Soient $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue et $s_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\begin{cases} s(0) &= s_0 \\ \forall t \in \mathbb{R}, & s'(t) = p(t)s(t) - s(t)p(t) \end{cases}$.
On suppose que s_0 est symétrique et que $p(t)$ est antisymétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $s(t)$ est symétrique pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = u(t)s_0u(t)^T$.
4. Montrer qu'il existe $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, s(t) = u(t)s_0u(t)^T$.

Exercice 54 (Ulm-X) * Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), E$ l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$. Pour $u \in E$, soit X_u l'unique application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $X_u(0) = x$ et $\forall t \in [0, 1], X'_u(t) = AX_u(t) + Bu(t)$.

Montrer que $\{X_u(1) ; u \in E\} = \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice $(A|AB|\dots|AB^{n-1})$ de $\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est de rang n .

Exercice 55 (L) * Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(*)$ l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. En discutant suivant la matrice A , donner l'allure des solutions de $(*)$.

Exercice 56 (Lyon) * Soient E l'espace des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $a \in \mathbb{R}$ et f dans E , soit f_a l'élément de E donné par $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = f(x - a)$. Déterminer les $f \in E$ tels que $\text{Vect}\{f_a ; a \in \mathbb{R}\}$ soit de dimension finie.

Exercice 57 (X) * Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une application continue R_A de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute application X de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A(t)X(t)$ et tout $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2$, on ait $X(t_1) = R_A(t_0, t_1)X(t_0)$.
2. On suppose que $A(t)$ est de trace nulle pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2, \det(R_A(t_0, t_1)) = 1$. Ind. Montrer que, pour toute matrice B et pour tous vecteurs $U, V, \det(BU, V) + \det(U, BV) = \text{Tr}(B) \det(U, V)$.
3. On suppose que A est 1-périodique. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}, R_A(n, 0) = R_A(1, 0)^n$.
4. On suppose que A est 1-périodique et que, pour tout réel $t, A(t)$ est de trace nulle. Montrer que s'il existe une solution bornée non nulle alors $|\text{Tr}(R_A(1, 0))| \leq 2$.
5. On garde les mêmes hypothèses sur A et on veut établir une réciproque partielle. On suppose que $|\text{Tr}(R_A(1, 0))| < 2$. Montrer que toutes les solutions sont bornées.

Exercice 58 (SR) * Soit P une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), T$ -périodique. On s'intéresse à l'équation différentielle : (1) $X'(t) = P(t)X(t)$.

1. Dans le cas où la matrice $P(t)$ vaut $\begin{pmatrix} 1 & \cos(t) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, donner la forme générale des solutions. Lesquelles-sont périodiques ?
2. On revient au cas général. Soit $T \in \mathbb{R}^{+*}$ une période de P . On note $X_1, \dots, X_n$ une base de l'espace des solutions de (1) et, si $t \in \mathbb{R}, M(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$. Montrer qu'il existe $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}, M(t+T) = M(t)C$.

3. Avec les notations de la question précédente, montrer qu'il existe $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t)e^{-tA}$ soit T -périodique.

Exercice 59 (ENS) On pose, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[A, B] = AB - BA$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de classe C^1 . On suppose qu'existe une application continue B de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A'(t) = [A(t), B(t)]$. Montrer que le polynôme caractéristique de $A(t)$ est indépendant de t .

Étude qualitative d'EDL non linéaires

Exercice 60 (X)

1. Soit f une fonction croissante de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que ff possède un point fixe.
2. On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire :

$$(E) \quad x'(t) = \cos(x(t)) + \cos(t).$$

On admet que pour tout $a \in [0, \pi]$, il existe une unique solution ϕ_a telle que $\phi_a(0) = a$, et de plus que s'il existe t tel que $\phi_a(t) = \phi_b(t)$ alors $a = b$.

Montrer qu'il existe une unique solution ϕ_a de (E) qui est 2π -périodique.

Indication : on pourra montrer que toute solution ϕ_a est à valeurs dans $[0, \pi]$.