

Feuille d'exercices : Calcul différentiel

Étude de la régularité

Exercice 1 (CCINP-Centrale) Étudier les limites éventuelles en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right);$

3. $f(x, y) = x^y;$

2. $f(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2};$

4. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$

Exercice 2 (TPE) La fonction f est définie sur $[0, 1]^2$ par $f(1, 1) = 0$ et $f(x, y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ pour $(x, y) \neq (1, 1), .$

1. Montrer que f est continue.
2. Déterminer le maximum de f .

Exercice 3 (Centrale) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x, y) = \frac{|x|^\alpha}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Étudier, selon la valeur de α , la continuité de f .

Exercice 4 (Mines) Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = x(1 - y)$ si $x \leq y$, $f(x, y) = y(1 - x)$ sinon. Étudier la continuité et la différentiabilité de f .

Exercice 5 (Mines) On pose $f(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^2}$. Étudier la continuité et la différentiabilité de f .

Exercice 6 (Centrale-Mines) * Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle en tout point des applications matricielles suivantes :

1. $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^t A A$

3. $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det(A)$

2. $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{Tr}(A)$

4. $A \mapsto A^{-1}$.

Exercice 7 (ENS SR) * Soit $A : t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dérivable. Calculer la dérivée de $t \mapsto \det(A(t))$.

Exercice 8 (ENSEA-ENSIIE) Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x, y) &= \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) &= 0. \end{cases}$$

1. Démontrer que f est continue et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. En déduire que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9 (Mines-Centrale) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y. \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases} \end{cases}$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $J_{p,q} = \int_0^1 (1-t)^p t^q dt$. En déduire la valeur des dérivées partielles de g sur la diagonale.
3. On suppose ici $f = \sin$. Tracer l'ensemble d'équations $g(x, y) = 0$. Déterminer les extrema de g .

Exercice 10 (Mines) On pose $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^{2n} + y^{2n})$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .

Exercice 11 (Mines) Déterminer le domaine de définition de $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}$. Est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 12 (ENS)

1. Montrer qu'une norme N n'est jamais différentiable en 0_E .
2. Quels sont les points où les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont différentiables.

Exercice 13 (Centrale) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

1. Pour tout $x \in E$, exprimer la projection orthogonale de x sur F à l'aide d'une base orthonormale de F . Justifier la formule.
2. On définit la fonction $d_F : E \setminus F \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d(x, F)$. Montrer que d_F est différentiable, et calculer sa différentielle.

Études d'extrema

Exercice 14 (CCINP-Mines-Centrale) Étudier les extrema locaux des fonctions suivantes, et déterminer éventuellement si ce sont des extrema globaux :

- | | |
|--|---|
| 1. $3xy - x^3 - y^3$ | 4. $\frac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}, x, y > 0$ |
| 2. $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - (x-y)^2$. | 5. $xe^y + ye^x$ |
| 3. $2x + y - x^4 - y^4$ | 6. $x(\ln^2 x + y^2), x > 0$ |

Exercice 15 (CCINP-Mines-Centrale-SR) ** Soient A symétrique réelle de taille n , définie et positive, et $b \in \mathbb{R}^n$ fixé.

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer ∇f .
2. Montrer que f est strictement convexe.
3. Montrer que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$.
4. Étudier les extrema de f .
5. Soit (X_k) une suite de vecteurs non nuls vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = X_k - \frac{\|\nabla f(X_k)\|}{X_k^T A X_k} \nabla f(X_k).$$

On suppose que la suite (X_k) est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 16 (Mines-Centrale) Soit $a > 0$. Montrer que $f : (x, y) \mapsto x + y + \frac{a}{xy}$ a un unique minimum strict sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ (que l'on déterminera).

Exercice 17 (PLSR) Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^+)^3$. Démontrer que $(x + y + z)^3 + 9xyz \geq 4(x + y + z)(xy + yz + zx)$.

Exercice 18 (Mines) Soient E un espace euclidien, S sa sphère unité, f une fonction différentiable sur un voisinage de S , à valeurs réelles. On suppose que la restriction de f à S admet un extremum local en x_0 .

1. Que dire de $\nabla f(x_0)$?
2. Soit u un endomorphisme symétrique de E . Appliquer ce qui précède à $f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$ et en déduire une démonstration du théorème spectral.

Exercice 19 (Mines) Soient E un espace euclidien, $\varphi \in E^*$ une forme linéaire et $f : x \mapsto \varphi(x)e^{-\|x\|^2}$. Étudier les extrema de f .

Exercice 20 (Mines) Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathcal{O}(E)$ et, pour $x \neq 0$, $\varphi(x) = \frac{\langle u(x), x \rangle}{\|x\|^2}$.

1. Montrer que φ est bornée sur $E \setminus \{0\}$ et atteint ses bornes.

2. Montrer que si φ est extrémale en un point $x \neq 0$, alors $\text{Vect}(x, u(x))$ est stable par u .

Exercice 21 (Mines) Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs non nuls de E . Pour $x \in E \setminus \{0\}$, soit $f(x) = \frac{\langle x, a \rangle \langle x, b \rangle}{\|x\|^2}$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f .

Exercice 22 (X) On munit $\mathbb{R}^m$ de sa structure euclidienne canonique. Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et on pose

$$\Phi : M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \mapsto \sum_{i=1}^n \|x_i - Mx_i\|^2.$$

Montrer que la restriction de Φ à $\mathcal{A}$ admet un minimum et le calculer à l'aide de la matrice $\sum_{i=1}^n x_i x_i^T$.

Ind. Montrer que $\Phi(xy^\top) \geq \Phi(xx^\top)$ pour tout vecteur unitaire $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $y \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 23 (Mines) On considère n expériences indépendantes ayant les probabilités de réussite respectives $p_1, \dots, p_n$. On note N le nombre d'expériences ayant réussi.

1. Déterminer $\mathbb{E}(N)$ et $\mathbb{V}(N)$.
2. On fixe $m \in \mathbb{R}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$. Quel est le maximum de $\mathbb{V}(N)$ sous la contrainte $\mathbb{E}(N) = m$?

Exercice 24 (SR) Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimension finie, $v \in F$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On munit F d'une norme euclidienne N .

1. La fonction $g : x \mapsto N(f(x) - v)$ admet-elle un minimum sur E ?
2. Montrer que si f est injective, le minimum de g est atteint en un seul point x_0 .
3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (i) g admet un minimum en x_0 ,
 - (ii) $f(x_0) - v \perp \text{Im}(f)$.
4. Si $\mathcal{B}$ est une base de E , $\mathcal{C}$ une base orthonormée de F , si A , X_0 et V sont les matrices respectives de f , x_0 et v dans ces bases, montrer que ${}^t A A X_0 = {}^t A V$.

Exercice 25 (ENS SR) Soient $C \in \mathbb{R}^n$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto {}^t C X + {}^t X S X$ présente en 0 un extremum local.

Exercice 26 (X) Soient B (resp. S) la boule unité ouverte (resp. la sphère unité) de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique, f une fonction continue de $\overline{B}$ dans $\mathbb{R}$ de restriction à B de classe C^2 , $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ des fonctions continues de B dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout $x \in B$, la matrice $(a_{i,j}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ appartienne à $S_n^{+*}(\mathbb{R})$.

On suppose que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ est identiquement nulle sur B . Montrer que f atteint son maximum sur S .

Exercice 27 (SR) On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.
2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, que vaut $d(A, \text{GL}_n(\mathbb{R}))$?
3. On note $S = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M_0 \in S$ telle que $d(A, S) = \|A - M_0\|$.
4. Rappeler le résultat sur les extrema sous contrainte. Que peut-on en déduire sur la matrice M_0 définie ci-dessus?

Équations aux dérivées partielles

Exercice 28 (CCINP) Intégrer l'équation aux dérivées partielles $z \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -x^2 - y^2$ où $z = z(x, y)$. On utilisera les coordonnées polaires.

Exercice 29 (ENSEA - ENSIIE) Trouver les fonctions f vérifiant $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 y^3$ (on pourra envisager le changement de variable $u = 2x + y$, $v = 2x - y$).

Exercice 30 (Mines) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Déterminer les fonctions différentiables f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $a \frac{\partial f}{\partial x} + b \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Exercice 31 (Mines) Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ et g définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par : $g(x, y) = f\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)$. Déterminer les fonctions f qui vérifient : $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.

Exercice 32 (Mines) * Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, et $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer l'équivalence entre

- (i) $\forall a \in \mathbb{R}^n, \forall \mu > 0, f(\mu a) = \mu^\alpha f(a)$.
- (ii) $\forall a \in \mathbb{R}^n, df(a).a = \alpha f(a)$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x)$.

Une telle application est dite α -homogène.

Utiliser ce qui précède pour résoudre $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^3 + y^3}$.

Exercice 33 (Centrale) Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On note Δf son laplacien et on définit $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

- Calculer $(\Delta f)(r \cos \theta, r \sin \theta)$ en fonction des dérivées partielles de F .
- On pose $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Montrer que si f est homogène alors son degré homogène α est unique.
- Montrer que dans ce cas les dérivées partielles sont $\alpha - 1$ -homogènes.
- Déterminer les applications homogènes de laplacien égales à $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

Exercice 34 (Mines) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \rightarrow (f(x, y), 2xy) \end{cases}$. Déterminer f pour que la matrice jacobienne de ϕ soit une matrice de similitude directe.

Exercice 35 (X) Soient g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, h une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ paire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, on ait : $-y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = g(x, y), \quad f(x, 0) = h(x)$.

- Montrer que E contient au plus un élément.
- On suppose que, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2, g(x, y) = xy$. Déterminer E .

Exercice 36 (SR)

- Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ admettant un maximum local en (x_0, y_0) . Que dire de : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$?
- Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 1\}, \overline{D}$ son adhérence et ∂D sa frontière. Soient $\epsilon > 0, T > 0$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{C}^2$ vérifiant :
 - (i) $\forall (x, y) \in \overline{D}, f(0, x, y) \geq \epsilon,$
 - (ii) $\forall (x, y) \in \partial D, \forall t \in [0, T], x \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) = 0,$
 - (iii) $\forall (x, y) \in \overline{D}, \forall t \in [0, T], \frac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, x, y) \geq \epsilon.$

Montrer que $f > 0$ sur $[0, T] \times \overline{D}$

Fonctions convexes ou avec d'autres propriétés

Exercice 37 (Mines-ENS-SR) * Soient $n \in \mathbb{N}^*, f = (f_1, \dots, f_n)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

- Montrer que f est une application affine si et seulement si sa différentielle est constante.
- On suppose que la différentielle de f est constante et que f s'annule en tout point de la frontière d'un ouvert borné non vide. Montrer que f est nulle.
- Montrer le lemme : si X est un ensemble quelconque et $\phi : X^3 \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie $\forall (x, y, z) \in X^3, \phi(x, y, z) = \phi(y, x, z) = -\phi(z, y, x)$, alors $\phi = 0$.
- Montrer l'équivalence entre :
 - il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$;
 - pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de f en x est antisymétrique.
- Montrer l'équivalence entre :

- il existe $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f = \nabla \phi$,
 - pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne de f en x est symétrique.
6. On suppose f de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f est une isométrie de E pour la distance euclidienne si et seulement si, pour tout $x \in E$, $df(x)$ est une application orthogonale.

Exercice 38 (Mines-X) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|f'(t)| \leq k$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = (x + f(y), y + f(x)).$$

Montrer qu'en tout point $a \in \mathbb{R}^2$, $dg(a)$ est un automorphisme. Puis montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 39 (Centrale) * Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ est injective ; et $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Calculer g .
2. Montrer que g admet un minimum.
3. En déduire que f est surjective.

Exercice 40 (Centrale) * On considère une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $(a, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $\langle dg_a(h) | h \rangle \geq c \|h\|^2$.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ $\langle g(b) - g(a) | b - a \rangle \geq c \|b - a\|^2$.
2. Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$.

Exercice 41 (Mines) * Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable telle que :

- pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ est injective ;
- $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.

1. Calculer g .
2. Montrer que g admet un minimum.
3. En déduire que f est surjective.

Exercice 42 (Mines) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique. On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(\frac{1}{2} \sin(x + y), \frac{1}{2} \cos(x - y) \right)$.

1. Calculer la différentielle de f en tout point.
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|df(x, y)\|_{\text{op}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. En déduire que f possède au plus un point fixe.

Exercice 43 (Mines) Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle qu'en tout point x le spectre de la hessienne soit inclus dans $[1, +\infty[$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a $f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle + \frac{1}{2} x^T x$.

Ind. Considérer $\psi : t \mapsto f(tx) - \langle \nabla f(0), tx \rangle - \frac{1}{2} t^2 x^T x$.

2. En déduire que f admet un minimum.

Exercice 44 (Toutes écoles) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe sur U si et seulement si : $\forall (a, b) \in U$, $f(b) \geq f(a) + \langle \nabla f(a), b - a \rangle$.

Exercice 45 (PLSR) Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$.

1. Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ($\Omega = \mathbb{R}^n$ dans ce cas), est-elle convexe ?
2. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $(x, y) \in \Omega^2$, $f(y) \geq f(x) + df(x)(y - x)$. Donner une interprétation géométrique.
3. Soit f une fonction convexe sur Ω . Supposons qu'elle admet un point critique $a \in \Omega$. Montrer que f admet un minimum global en a .

4. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$. Pour tout $x \in \Omega$, on note $H(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}_n^2}$ la matrice hessienne de la

fonction f au point x . Et on note $\phi_x : \begin{cases} E \times E & \rightarrow \mathbb{R} \\ (U, V) & \mapsto \phi_x(U, V) = {}^t U H(x) V \end{cases}$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \Omega^2$,

$$f(b) = f(a) + df|_a(b-a) + \int_0^1 (1-t) \phi_{\gamma(t)}(b-a, b-a) dt.$$

5. En déduire que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, $H(x)$ est une matrice symétrique positive.

Exercice 46 (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout couple (u, v) d'éléments de $\mathbb{R}^n$, la fonction $t \mapsto f(u + tv)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. On suppose que f est convexe. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que toutes les dérivées partielles $\partial_i f(x)$, pour $1 \leq i \leq n$ existent. Montrer que f est différentiable en x .

Exercice 47 (PLSR) Soient f une application $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que si f est convexe alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0.$$

2. On suppose que f est convexe et que l'application ∇f est L -lipschitzienne. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y - x \rangle \geq \frac{1}{L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$.
3. Montrer la réciproque.

Exercice 48 (Lyon) * Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On note $df(a)$ la différentielle de f en a . On suppose que df , de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, est injective et que $\frac{f(x)}{\|x\|} \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer que f est strictement convexe et que df réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Exercice 49 (Lyon) Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, strictement convexe, telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.

1. Montrer que f admet un unique minimum.
2. Si $x_0 \in \mathbb{R}^2$, on admet qu'il existe une unique application x de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $x(0) = x_0$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+, x'(t) = -\nabla f(x(t))$. Étudier le comportement de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
3. Démontrer le résultat admis dans la question précédente.

Exercice 50 (X) Soient φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $Z = \varphi^{-1}\{0\}$.

1. Soit $z \in Z$ tel que $\nabla \varphi(z) \neq 0$. Que dire de Z au voisinage de z ?
2. On suppose que Z compacte, non vide, et que $\nabla \varphi$ ne s'annule pas sur Z . Quelle est l'image de $z \in Z \mapsto \frac{\nabla \varphi(z)}{\|\nabla \varphi(z)\|}$?

Exercice 51 (Ulm) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique notée $\| \cdot \|$ et on note B la boule unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que :

$$\forall (u, v) \in B^2, \quad \| -f(0) + v - df_u(v) \| \leq \frac{1}{2}.$$

Montrer que f s'annule exactement une fois sur B .

Autour des fonctions harmoniques et holomorphes

Exercice 52 (Mines) *

Pour $R > 0$, on donne f de classe $\mathcal{C}^2$ de $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < R\}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\Delta f = 0$ et on définit F sur $] -R, R[$ par $F(r, t) = f(r \cos t, r \sin t)$.

1. Trouver une relation entre les dérivées partielles de F et f .
2. Pour $n \in \mathbb{Z}$, trouver une équation différentielle vérifiée par ϕ_n , définie sur $] -R, R[$ par $\phi_n(r) = \int_0^\pi F(r, t) e^{-int} dt$ et la résoudre.

3. Pour $r > 0$, on pose $K(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$. Montrer que K est constante et donner la valeur de la constante.

Exercice 53 (Mines) * Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\Delta f = 0$. Soit $g : (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

1. Montrer que $r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial g}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = 0$.
2. Soit $\phi : r \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $(r\phi')' = 0$.
3. Montrer que ϕ est constante.

Exercice 54 (Lyon)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'application $r \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_{-\pi}^{\pi} f(x + r \cos(\theta), y + r \sin(\theta)) d\theta$ soit constante.
2. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\sin(\theta)) d\theta$.

Exercice 55 (X) * Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une fonction continue de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que f vérifie $\mathcal{P}$ sur Ω si, pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $r > 0$ tel que le disque fermé de centre z_0 et de rayon r soit contenu dans Ω , on ait $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$.

1. Montrer que, si f est somme d'une série entière de rayon $R > 0$, f vérifie $\mathcal{P}$ sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon r .
2. Montrer que, si f vérifie $\mathcal{P}$ sur Ω et est à valeurs réelles, alors, pour tout compact non vide K contenu dans Ω , $\max\{f(z) ; z \in K\} = \max\{f(z) ; z \in \text{Fr}(K)\}$.
3. On suppose que f vérifie $\mathcal{P}$, est de classe $\mathcal{C}^2$ et à valeurs réelles. Que dire de Δf ?

Exercice 56 (X) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, 2π -périodique, développable en série entière en tout point avec un rayon $\geq R$. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $s \in]-R, R[$, $F(x, s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (is)^k$.

1. Montrer que $\frac{\partial F}{\partial s} = i \frac{\partial F}{\partial x}$.
2. On pose $f_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $r > 0$, il existe $M_r \geq 0$ tel que, pour tout n , $|f_n| \leq M_r e^{|n|r}$.

Exercice 57 (CCINP-Mines-Centrale-X) * Soit f une fonction sur Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$. On pose u et v les fonctions à valeurs réelles telles que pour tout $z \in \Omega$, $z = x + iy$, $f(z) = \tilde{f}(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. On suppose u et v de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrer que si on a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

alors $\Delta u = \Delta v = 0$.

2. On suppose que $f|_{\mathbb{D}}$ est somme d'une série entière ; calculer pour tout $z \in \mathbb{D}(0, R)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)(z)$ et en déduire que (1) est vérifiée.

Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, f une fonction de Ω dans $\mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$ -dérivable au point z_0 de Ω si $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ tend vers une limite finie quand z tend vers z_0 .

3. Montrer que $z \mapsto z^2$ et $\exp$ sont $\mathbb{C}$ -dérivables en tout point de $\mathbb{C}$.
4. La conjugaison complexe est-elle $\mathbb{C}$ dérivable en un point z_0 de $\mathbb{C}$?
5. Montrer que la propriété 1 est équivalente à la $\mathbb{C}$ -dérivabilité de f .
6. (X) On suppose que $\Omega = \mathbb{D}$, que $f|_{\mathbb{D}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)(z) = 0$; montrer que $f|_{\mathbb{D}}$ est somme d'une série entière.

Exercice 58 (ULSR) On dit qu'une application $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une similitude si elle est la composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle. On note Δf le laplacien de f .

Soit $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ (avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$) tel que pour tout $a \in \Omega$, $df(a)$ est une similitude.

1. Pour $n = 2$, on écrit $f = (f_1, f_2)$. Démontrer que $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$.
2. Qu'en est-il pour $n = 3$?

Exercice 59 (X) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R, S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, P(x + iy) = R(x, y) + i S(x, y).$$

1. Montrer que R et S sont de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y}$ et $\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{\partial S}{\partial x}$.
2. Traduire le résultat de la question précédente en coordonnées polaires.
3. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{P(z+h) - P(z)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} P'(z)$. Retrouver par ce biais le résultat de la première question.
4. On suppose qu'il existe $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, non identiquement nulle, et telle que $\forall z \in \mathbb{C}, F(P(z)) = 0$. Montrer que P est constant.

Espaces tangents

Exercice 60 (PLSR)

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $a \in U$. Déterminer les vecteurs tangents à U en a .
2. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'en tout point $a \in X$, tout vecteur de $\mathbb{R}^n$ est tangent à X en a . Est-ce que X est nécessairement un ouvert de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 61 (PLSR) *

1. Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n .
2. On pose $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(M) = 0\}$ et $S = \{e^A, A \in H\}$. Étant donné $M \in S$, montrer que l'espace tangent à S en M est inclus dans MH .
3. Montrer que l'espace tangent à S en I_n est H .
4. On suppose $n = 2$, est-ce que $S = SL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 62 (Mines) * Si $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $T_{I_n} \text{SO}_n(\mathbb{R})$, puis, si $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, $T_M \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 63 (X) *

1. Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $pu + up = u$. Montrer que $\text{Tr}(u) = 0$.
2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note G l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E de rang r . Soit $p \in G$. Déterminer l'espace vectoriel tangent à G en p .

Exercice 64 (Centrale) *

1. Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E , et $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $df(a)$ de f en $a \in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.
2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique. Montrer que $\nabla(\det)(A) = \text{Com}(A)$.
3. Quel est le coefficient de X dans χ_A ?
4. Déterminer l'espace tangent à $SL_n(\mathbb{R})$ en I_n .