Séries numériques et familles sommables

Nature et somme d'une série :

Exercice 1 Étudier la nature de la série de terme général :

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\ln\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $\frac{n^n}{(2n)!}$
3. (CCP) $\frac{n^\alpha(\ln n)^n}{n!}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$
4. (ENSEA) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}$
5. $\tan\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n^\alpha+\sqrt{n}}{n^\alpha-\sqrt{n}}\right)$
6. (CCP) $(-1)^n\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
7. (CCP-Mines) $\ln\left(1+\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ $(\alpha>0)$
8. (IMT) $\sin\left(\frac{\pi}{n}(n^2+an+b)\right)$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$
9. (IMT) $\frac{1}{\sum_{k=2}^n\ln k}$
10. (Mines) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^\alpha}$, $n\geq 2$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.
11. (Mines) $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}}+(-1)^n}$
12. (Mines) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$
13. (Mines) $\frac{(-1)^n\ \mathrm{e}^{-\lambda\ln n}}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
14. (Mines) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
15. (Mines) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
16. (Mines) $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n\alpha}\right)^n$ où $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
17. (Mines) $\frac{1}{\sqrt{n\ln^2(n)}}$
18. (Mines) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)-\operatorname{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2+2}\right)$
19. (Mines) $\frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$

Exercice 2 *(TPE)* Nature de la série de terme général $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{t\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 *(X)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. On pose $a_n=\inf\limits_{p\geq n}\left\{p\left(\frac{u_p}{u_{p+1}}-1\right)\right\}$. On suppose que, pour tout n, $a_n>1$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes (on pourra pour certaines utiliser la valeur de $\sum\frac{1}{n^2}$) :

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$
4. (TPE) $\sum_{n=1,n\neq p}^{\infty}\frac{1}{n^2-p^2}$
5. (Mines) $\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^n k^2\right)^{-1}$.

Exercice 5 *(CCPINP)*

1. Montrer que la suite de terme général $u_n=\sum_{k\geq n}\frac{(-1)^k}{k^2}$ est définie et que $u_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en $+\infty$.
2. Montrer que $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N\left(\sum_{k=n}^N\frac{(-1)^k}{k^2}\right)=\sum_{k=1}^N\frac{(-1)^k}{k}$.
3. Exprimer $\sum_{n=1}^N u_n$ en fonction de Nu_{N+1} et de $\sum_{k=1}^N\frac{(-1)^k}{k}$.
4. Montrer que $\sum_{n\geq 1}u_n=-\ln 2$.

Exercice 6 *(Mines)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.
2. On suppose que $\sum a_n$ converge. Soit $\lambda > 1$. On introduit les ensembles
$$I = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda a_n\right\} \text{ et } J = \left\{n \in \mathbb{N}^*,\ a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n\right\}.$$
En considérant ces deux ensembles, montrer que $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.
3. En déduire que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge et que
$$\sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leq \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n} + 1.$$

Exercice 7 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{+*})$. On suppose que $f'(x)/f(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 8 *(X)** Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Nature de $\displaystyle\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 9 *(X)* Soit $u = (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_0 = 1$ et la série de terme général $\dfrac{u_n^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq 4$.

Exercice 10 *(Mines-ENS P)* Soit $\sum a_n$ une série divergente à terme général positif. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

Exercice 11 *(X)** Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x_n$ une série absolument convergente à termes réels.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |x_n|^p$ converge pour tout réel $p \geq 1$.
2. Déterminer la limite, lorsque p tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 12 *(Ulm)* Soient $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que :
$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_{n\geq 0}$ converge.

Exercice 13 *(ENS)* Soit $u = (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{2n} + u_{2n+1}$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 14 *(Lyon)** Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série de terme général $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. La constante e est-elle optimale ?

Sommabilité :

Exercice 15 *(Mines-X)* Déterminer si les familles suivantes sont sommables :

1. $\dfrac{1}{i^\alpha + j^\alpha}$, $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$
2. $\dfrac{1}{a^p}\dfrac{1}{b^q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ (avec $a > 1$ et $b > 1$ fixés)
3. $\dfrac{1}{a^p + b^q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ (avec $a > 1$ et $b > 1$ fixés)
4. $\dfrac{1}{x^2}$, $x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$
5. $\left(\dfrac{1}{a^m + b^n}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, $(a,b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 16 *(X)** Déterminer si la famille suivante est sommable : $\dfrac{1}{N(v)^\alpha}$, $v \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$, avec N norme sur $\mathbb{R}^d$ fixée. On admettra que toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentex.

Exercice 17 * On pose pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{1}{p^2 - q^2} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}$ et $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}$. En déduire que la famille n'est pas sommable.

Exercice 18 Montrer la convergence et calculer les sommes suivantes (éventuellement en fonction des $\zeta(k)$) :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2q^2}$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 19 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, après avoir montré la convergence des séries.

Exercice 20 Montrer que pour $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Exercice 21 *(Mines)* Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(n-1)\left(2^n(\zeta(n)-1)-1\right)$.

Exercice 22 *(Mines)** On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n, $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler et ζ la fonction de Riemann.

1. Montrer que, pour $\alpha > 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$. Que dire pour $\alpha \leq 1$?
2. Montrer que, pour $\alpha > 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$. Que dire pour $\alpha \leq 2$?

Exemples et contre-exemples :

Exercice 23 *(Mines)* Existe-t-il une suite u à valeurs réelles strictement positives telle que $\sum u_n$ converge et telle que $\ln u_n \sim -\ln n$?

Exercice 24 *(Mines)** Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

1. Suffit-il que (na_n) tende vers 0 pour que la série $\sum a_n$ converge ?
2. La convergence de $\sum a_n$ entraîne-t-elle que (na_n) tend vers 0 ?
3. Si la suite (a_n) est décroissante, montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Exercice 25 *(Mines)* Soit u une suite réelle positive décroissante.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum nu_{n^2}$ converge.
2. Étudier le lien entre la convergence de $\sum u_n$ et celle de $\sum n^2u_{n^2}$.

Exercice 26 *(ENS)**

1. Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ famille sommable. Montrer que pour tout $k \geq 2$ la famille (u_n^k) est sommable.
2. Soient u et v deux familles sommables telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k$. Montrer qu'il existe une permutation ϕ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{\phi(n)}$.
3. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe N et deux suites $(u_n)_{0\leq k\leq N}$ et $(v_n)_{0\leq k\leq N}$ telles que pour tout $k \in A$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^k = \sum_{n=0}^{N} v_n^k$, mais qu'il n'existe aucune permutation de $[\![0, N]\!]$ telle que pour tout n, $u_n = v_{\phi(n)}$.
4. Trouver une partie infinie de A et deux suitess complexes u et v telles que pour tout $k \in A$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k$, mais telles que u ne soit pas une permutation des éléments de v.

Autour de Raab-Duhamel :

Exercice 27 *(Mines)** Soient $0 < a < b$ et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$. Déterminer une CNS pour que la série de terme général u_n converge. Dans ce cas, donner la somme $\sum n(u_{n+1} - u_n)$. Puis calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 28 *(Mines)** Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. En déduire l'existence de $C > 0$ tel que $n! \sim C\sqrt{n}\, n^n e^{-n}$.

Exercice 29 *(SR)*

1. Soient (a_n) et $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Que peut-on dire des séries de termes généraux a_n et b_n ?
2. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, avec $\alpha > -1$. Montrer que $\sum a_n$ diverge.
3. Que peut-on dire si $\alpha < -1$?

Comparaison séries-intégrales :

Exercice 30 *(CCPIN)**

1. Expliquer que pour tout $x \in [0, 1[$ la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Que peut-on dit pour $x = 1$?
2. On note, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$. En utilisant la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-ut}}{1+\mathrm{e}^{-ut}} \end{cases}$ (pour un u bien choisi), trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 31 *(Mines)* Soit f une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

1. On suppose que $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_0^n f$.
2. Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$?

Exercice 32 *(Mines)** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k}$, $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$, $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(2k)}{k}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer l'existence de $\ell \in \mathbb{R}$, que l'on déterminera, tel que $x_n = \ell + O\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2. Exprimer u_n en fonction de v_n et de w_n.
3. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et exprimer sa limite en fonction de γ.

Exercice 33 *(X)* * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge, on note ℓ sa limite.
2. Montrer que $\ell = -(1+\sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Exercice 34 *(X-ENS-Mines)***

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge. En fonction des valeurs de α, quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$?
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge. En fonction des valeurs de α, quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$?

Exercice 35 *(X)* Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : pour tout $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum y_n^2$ converge, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.
Indication : on pourra poser $y_n = \frac{x_n}{\sum_{k=0}^{n} x_k^2}$.

Sommation des relations de comparaison :

Exercice 36 *(Centrale)* Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$. On suppose que $a_n S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

1. Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
2. Donner un équivalent de a_n.

Exercice 37 *(Mines)* Soit $f \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*}\right)$ telle que $f(0) = 1$ et $f' < 0$. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$.

1. Montrer que (a_n) est une suite décroissante positive convergeant vers 0.
2. Montrer que $\sum a_n$ diverge.

Exercice 38 *(X)* Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite u par les conditions $u_0 = a$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \tanh(u_{n-1})$.

1. Montrer la convergence de la suite u.
2. Donner un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 39 *(X)** Soient $c > 0$ et $f : [0, c] \longrightarrow [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$ avec $a > 0$ et $\alpha > 0$.

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.
2. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{a\alpha n}\right)^{1/\alpha}$.
3. Traiter l'exemple de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ puis de la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1+2x}$.

Exercice 40 *(Mines-Centrale)** Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) converge-t-elle ? (On pourra montrer que (u_n) converge pour $\alpha > 1$ vers une limite notée ℓ.)
2. Trouver un équivalement de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge.
3. Trouver un équivalent de u_n dans le cas où la suite (u_n) diverge. vers ℓ. (on pourra étudier $u_{n+1}^2 - u_n^2$).

Exercice 41 *(X)* Soit (a_n) une suite décroissante positive, $0 < a < 1$ et $c > 0$. Montrer que $a_n \sim c/n^a$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{c\,n^{1-a}}{1-a}$.

Transformation d'Abel :

Exercice 42 *(Mines)** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge et que dans ce cas les deux séries ont la même somme et que $nu_n \to 0$.

Exercice 43 *(X)* Soient A une partie de $\mathbb{N}^*$, et f, g définies par : $\forall n \geq 2$,

$$f(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\in A} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{1}_{k\in A}}{k}.$$

Pour $l \in \mathbb{R}_+$, comparer les assertions $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = l$.

Exercice 44 *(Ulm)* Soient ω une racine complexe de l'unité et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Étudier la nature de la série $\sum \omega^n u_n$.

Exercice 45 *(Centrale)* Si $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = 0$, soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n(u_n - u_{n-1})$. On note $\mathcal{P}_1$ (resp. $\mathcal{P}_2$) la propriété : $\sum v_n$ converge (resp. il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \to \ell$ et $\sum (\ell - u_n)$ converge).

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \arctan(n^\alpha)$. Étudier $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
2. Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n}$ converge et que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k} = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Comparer les propriétés $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

Exercice 46 *(Ulm)* Soient $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum \epsilon_n a_n$ converge. Montrer que $a_n \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Décomposition d'un réel :

Exercice 47 *(Centrale)* Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ où :

1. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ a un 9 dans son écriture décimale} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ n'a pas de 9 dans son écriture décimale} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 48 *(Centrale)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de 1 dans l'écriture de n en base 2. Par exemple $25 = \overline{11001}^2$, donc $u_{25} = 3$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \leq 1 + \log_2(n)$.
2. Déterminer la nature de $\sum_n \frac{u_n}{n(n+1)}$. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n(n+1)}$.
3. Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de u_n.
4. Montrer que $S = \frac{S}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
5. En déduire que $S = 2\ln 2$.

Exercice 49 *(ULCR)* Soit $q \in]1, 2[$. Montrer qu'il existe $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$, suite à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n q^{-n} = 1$.

Exercice 50 *(X)* Soit $(b_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers naturels non tous nuls telle que $b_{n+1} \geq 2b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-b_n}$ est un irrationnel.

Exercice 51 *(ENS)** Soit $x \in [0, 1[$ et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les chiffres de son écriture décimale propre. Montrer l'équivalence :

$$(x \in \mathbb{Q}) \ \Leftrightarrow\ (\exists N \in \mathbb{N},\ \exists q \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq N,\ a_{n+q} = a_n).$$

Exercice 52 *(X)* Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, soit $(v_n)_{n\geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2,\ v_n = \frac{1}{\ln(n)}\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

1. Que dire de $(v_n)_{n\geq 2}$ si $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers le réel ℓ ?
2. On suppose que u_n est égal à 1 si le premier chiffre de l'écriture de n en base 10 est 1, à 0 sinon. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\geq 2}$, puis celle de (w_n).

Exercice 53 *(ULSR)**

1. On considère un réel $x \geq 1$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times [\![1,Q]\!]$ tel que $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leq \dfrac{1}{qQ}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ (nombre de Liouville) est transcendant.

Applications :

Exercice 54 *(Centrale-X)** Pour tout $n \geq 2$, on note $P(n) = \max\{p \text{ premier},\ p|n\}$. On souhaite étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{nP(n)}$ (on pourra utiliser des regroupements par paquets).

1. On note q_n le n-ième nombre premier ; montrer que $\forall k \geq 1,\ q_k \geq 2k-1$.
   On pose $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{q_k}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{1}{nP(n)}$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum \frac{A_n}{q_n^2}$ converge et qu'elles ont même somme en cas de convergence.
3. Montrer l'existence d'une constante C telle que : $\forall n \geq 2$, $\ln(A_n) \leq C_1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} \leq C + \frac{1}{2}\ln(n)$.
4. Conclure.

Exercice 55 *(X)* Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $d(k)$ le nombre de diviseurs de k dans $\mathbb{N}^*$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} d(k)$. Donner un équivalent de D_n.
2. Soit γ la constante d'Euler. Montrer que $D_n = n\ln(n) + (2\gamma-1)n + O\left(\sqrt{n}\right)$.

Exercice 56 *(X)** On rappelle que μ désigne la fonction de Möbius et ζ la fonction de Riemann.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.
2. On rappelle que ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\phi(n)}{n} = \displaystyle\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.
3. Montrer que $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi(k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{\pi^2}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, et on note p_n la probabilité de l'événement $(X_n \wedge Y_n = 1)$. Montrer que la suite (p_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 57 *(Centrale)** On note r_n la probabilité que deux nombres aléatoires dans $[\![1,n]\!]$ soient premiers entre eux. Et on souhaite montrer que $\displaystyle\lim_{r\to\infty} r_n = \frac{6}{\pi^2}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $A_n = \left\{(a,b) \in [\![1,n]\!]^2,\ a \wedge b = 1\right\}$. En notant $(p_1, \ldots p_k)$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n, on pose pour $1 \leq i \leq k$, $U_i = \left\{(a,b) \in [\![1,n]\!]^2,\ p_i|a \text{ et } p_i|b\right\}$. Exprimer A_n en fonction des U_i.
2. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de multiples de l inférieurs ou égaux à n.
3. En déduire le cardinal de $\displaystyle\bigcap_{i\in I} U_i$ où I est une partie non vide de $[\![1,k]\!]$.
4. On admet la formule du crible (pour des ensembles finis) : $\mathrm{Card}\left(\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} F_j\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\ \leq n} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}\right)$.

   Montrer que $\mathrm{Card}(A_n) = \displaystyle\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2$.

5. Montrer que $\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)\frac{1}{d^2}$.
6. Montrer que pour $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Conclure.

Étude de suites et développements asymptotiques :

Exercice 58 *(CCINP)* La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.
1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 59 *(CCINP)* On considère la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.
1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (monotonie, limite). Puis donner un équivalent de u_n.
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? $\sum u_n^2$?
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 60 (Mines) Soit $u_0 = x \in \mathbb{R}_+$. On définit une suite par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)^2}$.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{\sin(\theta_n)}$ avec $\theta \in]0; \pi/2]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{\tan(\theta_{n+1})} = \frac{1}{\tan(\theta_n)} + \frac{1}{\sin(\theta_n)}$.
3. Determiner θ_n et trouver un équivalent de u_n.

Exercice 61 *(X)* On définit par récurrence la suite u par $u_1 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Étudier la convergence de la suite u.

Exercice 62 *(Centrale)*
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$.
2. Étudier la monotonie puis la convergence de cette suite.
3. En donner un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 63 *(Mines)* Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x + \ln(x) = k$ a une unique solution $x_k \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que (x_k) admet un développement asymptotique en $+\infty$ du type : $x_k = ak + b\ln(k) + c\frac{\ln(k)}{k} + o\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)$ (en déterminant les constantes a, b, c).

Exercice 64 *(Mines)*
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan x = \sqrt{x}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2[$. Elle est notée u_n.
2. Donner un développement asymptotique à quatre termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 65 *(Mines)* Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x - n\ln(x) = 0$ a deux solutions $x_n < y_n \in \mathbb{R}$. Donner un développement asymptotique en $+\infty$ de (x_n) en $\frac{1}{n^2}$; puis donner un équivalent de y_n.

Exercice 66 *(Centrale)* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n^n - u_n - 1 = 0$. Étudier la monotonie et la convergence de la suite. Puis donner un développement asymptotique à deux termes de cette suite.