Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels qui converge vers a. On cherche à préciser la vitesse de convergence en comparant la suite $\delta_n = |u_n - a|$ à des suites de référence. L'objectif de ce problème est d'étudier différentes méthodes d'accélération de convergence qui consistent à remplacer la suite (u_n) par une suite (v_n) qui converge toujours vers le même réel a mais telle que la nouvelle erreur $\epsilon_n = |v_n - a|$ soit plus petite que, et si possible négligeable devant, l'ancienne δ_n.
On l'utilisera notamment pour améliorer l'approximation de deux réels particuliers, $\ln 2$ d'une part et la constante d'Euler γ d'autre part. Dans une première partie, on exprime ces constantes comme limites de suites et on évalue leurs vitesses de convergence. Dans la deuxième partie, on étudie la transformation binomiale qui nous servira à introduire dans une troisième partie la transformation d'Euler qui est utilisée pour accélérer la convergence de séries alternées. On pourra ainsi l'appliquer à l'approximation de $\ln(2)$. Pour certaines suites, cette approximation peut être améliorée encore ; c'est l'objet de la quatrième partie. Enfin pour des suites à convergence lente, on étudiera dans une cinquième partie la méthode d'accélération de Romberg-Richardson que l'on pourra appliquer à γ.

I. Une première expression de $\ln 2$ et γ

(1) En appliquant une formule de Taylor à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ définie pour $x > -1$, montrer que :

$$\ln 2 = \zeta_a(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \tag{1}$$

(2) Quelle première majoration de l'erreur $\delta_n = \left|\ln 2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right|$ la formule de Taylor nous fournit-elle ?

(3) On définit la suite de terme général u_n pour $n \geq 1$ par la relation : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\gamma \in]0,1[$.

(4) Montrer que $u_n - u_{n+1}$ est l'aire de D_n où $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ n \leq x \leq n+1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n+1} \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$.

(5) Montrer que l'aire de D_n est comprise entre $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$.

(6) En déduire l'encadrement suivant de la constante d'Euler valable pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(n+1)}\,.$$

(7) En déduire un équivalent de $e_n = |\gamma - u_n|$.

(8) Si on pose $\widetilde{u_n} = u_n - \frac{1}{2n}$, expliquer que la suite $(\widetilde{u_n})$ converge toujours vers γ et que la nouvelle erreur $\widetilde{e_n} = |\widetilde{u_n} - \gamma| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

II. Dérivée discrète et transformation binomiale

On définit Δ l'opérateur opérant sur une suite quelconque $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par la relation :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ (\Delta u)_k = u_{k+1} - u_k.$$

En outre, on note Δ^n la puissance itérée n-ième de l'opérateur Δ : $\Delta^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$.

(1) Montrer que pour toute suite u, et pour tous k et n dans $\mathbb{N}$, on a :

$$(\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} u_{k+i}\,.$$

La transformée binomiale d'une suite $u = (u_n)_n$, notée $T(u) = (s_n)_n$ est définie par $s_n = (-1)^n (\Delta^n u)_0$.

(2) Montrer que pour toute suite u, la suite $T(u) = (s_n)_n$ vérifie : pour $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k$.

(3) Démontrer que cette transformation est une involution, c'est-à-dire $T \circ T = Id$. On pourra par exemple utiliser que $P \mapsto P(1-X)$ est une involution de $\mathbb{R}_n[X]$.

(4) On considère $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0 et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle la série de terme général λ_k diverge vers $+\infty$. Montrer que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_k}{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k} = 0$.

(5) Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente vers 0. Montrer que :
— à n fixé dans $\mathbb{N}$, $\lim_{k\to+\infty} (\Delta^n a)_k = 0$

— à k fixé dans $\mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0$.

III. Transformation d'Euler

Dans cette partie, on considère une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante et convergente vers 0.

(1) Expliquer que $\sum(-1)^k a_k$ converge. On note S la somme de cette série.

De quelle majoration de $\delta_n = \left|S - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right|$ dispose-t-on ?

(2) On définit pour tous k et n dans $\mathbb{N}$:

$$\alpha_{n,k} = \frac{(-1)^n}{2^n}(\Delta^n a)_k - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1} a)_k.$$

Montrer, à k fixé dans $\mathbb{N}$, que la série de terme général $(\alpha_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec pour somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{n,k} = a_k\,,$$

et, à n fixé dans $\mathbb{N}$, que la série de terme général $((-1)^k\alpha_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente avec pour somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\alpha_{n,k} = \frac{(-1)^n(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}\,.$$

On note $T(a) = (s_n)_n$ la transformée binomiale de la suite $(a_n)_n$. Et on pose $S_n = \sum_{p=0}^{n}\frac{s_p}{2^{p+1}} = \sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p a)_0$.

On note pour $p \in \mathbb{N}$, $r_p = \sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k a_k$.

(3) Montrer que $S - S_n = \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\binom{n+1}{p} r_p$.

(4) En déduire que $S = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{s_p}{2^{p+1}}$, avec convergence de la série.

(5) On suppose en outre que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la forme $a_k = f(k)$, où f est une fonction appartenant à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ complètement monotone, c'est-à-dire telle que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}_+,\ (-1)^k f^{(k)}(x) \geq 0\,.$$

Montrer dans ce cas que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $(-1)^n(\Delta^n a)_k \geq 0$ (on dit que la suite a est complètement monotone).

(6) Montrer (toujours sous cette hypothèse) que pour tout $m\in\mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{s_m}{2^{m+1}} \leq \frac{a_0}{2^{m+1}}\,.$$

(7) Donner une majoration de $\epsilon_n = |S - S_n| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{s_p}{2^{p+1}}\right|$ et en déduire que la convergence est géométrique.

(8) Dans le cas particulier où $a_k = \frac{1}{k+1}$, les hypothèses de la question III5 sont-elles vérifiées ? Donner une majoration de la nouvelle erreur ϵ_n obtenue et comparer à l'erreur initiale ?

IV. Nouvelle expression et amlioration quand $a_k = \int_0^1 x^k\omega(x)\ \mathrm{d}x$

Dans toute cette partie, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle pouvant s'écrire pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$a_k = \int_0^1 x^k\omega(x)\ \mathrm{d}x$$

où w est une fonction réelle continue et positive sur $[0,1]$.

(1) Montrer que la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0.

On continue de noter $S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k$.

(2) Montrer que $S = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$.

(3) Montrer que la suite a est complètement monotone, c'est-à-dire pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, $(-1)^n(\Delta^n a)_k \geq 0$.

(4) Montrer que $S = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1\left(\frac{1-t}{2}\right)^p\omega(t)\ \mathrm{d}t$.

(5) Retrouver dans ce cas que $S = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{s_p}{2^{p+1}}$.

On notera (S_n) les sommes partielles de cette série.

(6) En déduire que :

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}.$$

(7) Montrer que $|S - S_n| \leqslant \dfrac{S}{2^{n+1}}$. On retrouve la convergence géométrique.
On cherche à améliorer encore cette approximation. Pour cela, on se donne aussi une suite de polynômes à coefficients réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, $P_n(-1) \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$T_n = \frac{1}{P_n(-1)} \int_0^1 \frac{P_n(-1) - P_n(t)}{1+t}\omega(t)\ \mathrm{d}t.$$

(8) a. Montrer que : $S - T_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{P_n(t)}{P_n(-1)(1+t)}\omega(t)\ \mathrm{d}t$.

b. En déduire que : $|S - T_n| \leqslant \dfrac{SM_n}{|P_n(-1)|}$ où $M_n = \sup\limits_{t\in[0,1]} |P_n(t)|$.

(9) a. Démontrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg P_n = n \text{ et } \forall t \in \mathbb{R}, P_n(\sin^2 t) = \cos(2nt).$$

b. Calculer $P_n(-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Donner une majoration explicite de $|S - T_n|$ pour ce choix de polynômes.

V. Méthode d'accélération de Romberg-Richardson pour les convergences lentes

On suppose dans cette partie que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Et on suppose disposer un développement asymptotique de la forme $u_n = l + \dfrac{\lambda}{n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $0 < \alpha < \beta$.

On pose $v_n = \dfrac{2^\alpha u_{2n} - u_n}{2^\alpha - 1}$.

(1) Montrer que (v_n) converge vers l et $v_n - l = O\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

(2) Dans le cas de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$, définie question I3, on la remplace d'abord par $\widetilde{u_n}$ de la question I8. Quel v_n doit-on considérer ensuite ? Quel est l'ordre de grandeur de l'erreur ?