

Séries numériques et familles sommables

Nature et somme d'une série :

Exercice 1 Étudier la nature de la série de terme général :

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $\frac{n^n}{(2n)!}$
3. (CCP) $\frac{n^\alpha(\ln n)^n}{n!}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
4. (ENSEA) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma}$
5. $\tan\frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n^\alpha + \sqrt{n}}{n^\alpha - \sqrt{n}}\right)$
6. (CCP) $(-1)^n \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
7. (CCP-Mines) $\ln\left(1 + \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\right)$ ($\alpha > 0$)
8. (IMT) $\sin\left(\frac{\pi}{n}(n^2 + an + b)\right)$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
9. (IMT) $\frac{1}{\sum_{k=2}^n \ln k}$
10. (Mines) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^\alpha}$, $n \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
11. (Mines) $\frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{3}} + (-1)^n}$
12. (Mines) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
13. (Mines) $\frac{(-1)^n e^{-\lambda \ln n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$
14. (Mines) $\sin\left(\pi\sqrt{n^2 + 1}\right)$
15. (Mines) $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$
16. (Mines) $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1 + \frac{2}{n\alpha}\right)^n$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
17. (Mines) $\frac{1}{\sqrt{n \ln^2(n)}}$
18. (Mines) $\operatorname{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2 + 1}\right) - \operatorname{Arcsin}\left(\frac{n^2}{n^2 + 2}\right)$
19. (Mines) $\frac{\sin(2\pi en!)}{\ln(n)}$
20. (Mines) $\sin(\pi en!)$.

Exercice 2 (Mines) Pour tout $n \geq 0$, on pose $u_n = \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2) \, dx$.

1. Étudier le signe de u_n .
2. Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente.

Exercice 3 Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes (on pourra pour certaines utiliser la valeur de $\sum \frac{1}{n^2}$) :

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$
4. (TPE) $\sum_{n=1, n \neq p}^{\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}$
5. (Mines) $\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{k=1}^n k^2\right)^{-1}$.

Exercice 4 (CCPINP)

1. Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k^2}$ est définie et que $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en $+\infty$.
2. Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N \left(\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$.
3. Exprimer $\sum_{n=1}^N u_n$ en fonction de Nu_{N+1} et de $\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k}{k}$.
4. Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n = -\ln 2$.

Exercice 5 (Mines) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge. Montrer que la série $\sum a_n$ converge.
2. On suppose que $\sum a_n$ converge. Soit $\lambda > 1$. On introduit les ensembles

$$I = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, a_n^{1-\frac{1}{n}} \leq \lambda a_n \right\} \text{ et } J = \left\{ n \in \mathbb{N}^*, a_n^{1-\frac{1}{n}} > \lambda a_n \right\}.$$

En considérant ces deux ensembles, montrer que $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge.

3. En déduire que la série $\sum a_n^{1-\frac{1}{n}}$ converge si et seulement si la série $\sum a_n$ converge et que

$$\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n^{1-\frac{1}{n}}} \leq \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n} + 1.$$

Exercice 6 (Mines) On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ les sommes partielles de la série $\sum u_n$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$.

1. Exprimer $\sum_{k=0}^n v_k$. Et en déduire que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge.
2. Qu'en est-il de la réciproque (on pourra donner un contre-exemple) ?
3. Expliquer que la réciproque est vraie pour les séries à terme général u_n positif ou nul.
4. Montrer que la réciproque est vraie quand la suite (u_n) tend vers 0 et la suite $(\phi(n+1) - \phi(n))_n$ est bornée.
5. Étudier la nature de la série $\sum \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$ (en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$).

Exercice 7 (Mines) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. On pose $v_n = \frac{u_n}{\prod_{k=0}^n (1+u_k)}$ pour tout $n \geq 0$. Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 8 (Mines) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^{++})$. On suppose que $f'(x)/f(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 9 (Centrale) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de 1 dans l'écriture de n en base 2. Par exemple $25 = \overline{11001}^2$, donc $u_{25} = 3$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq 1 + \log_2(n)$.
2. Déterminer la nature de $\sum_n \frac{u_n}{n(n+1)}$. On note $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n(n+1)}$.
3. Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de u_n .
4. Montrer que $S = \frac{S}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.
5. En déduire que $S = 2 \ln 2$.

Exercice 10 (CCPINP)

On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t \end{cases}$.

1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi f(t) \cos(kt) dt$.

2. Calculer pour tout $t \in]0, \pi]$, $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Et montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} - C.$$

3. On pose $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{f(t)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{cases}$. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$.

4. En déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi h(t) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) dt = 0$.

5. Montrer que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 11 $(X)^*$ Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Nature de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 12 (X) Soit $u = (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_0 = 1$ et la série de terme général $\frac{u_n^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que $\sum_{n=0}^\infty \frac{u_n^2}{u_{n+1}} \geq 4$.

Exercice 13 $(Mines-ENS P)$ Soit $\sum a_n$ une série divergente à terme général positif. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$.

Exercice 14 (X) Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$ diverge.

Exercice 15 $(X)^*$ Soit $\sum_{n \geq 0} x_n$ une série absolument convergente à termes réels.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} |x_n|^p$ converge pour tout réel $p \geq 1$.

2. Déterminer la limite, lorsque p tend vers $+\infty$, de $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 16 (Ulm) Soient $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que :
 $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ converge.

Exercice 17 (ENS) Soit $u = (u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{2n} + u_{2n+1}$.
 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 18 (X) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ strictement croissante, continue et bijective. Montrer que les séries de termes généraux $\frac{1}{f(n)}$ et $\frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

Exercice 19 $(ULSR-Lyon)^*$ Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. Rappeler l'inégalité arithmético-géométrique.

Montrer que la série de terme général $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}$ converge et $\sum_{n=1}^\infty \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. La constante e est-elle optimale ?

Sommabilité :

Exercice 20 $(Mines-X)$ Déterminer si les familles suivantes sont sommables :

1. $\frac{1}{i^\alpha + j^\alpha}, (i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$
2. $\frac{1}{a^p} \frac{1}{b^q}, (p, q) \in \mathbb{N}^2$ (avec $a > 1$ et $b > 1$ fixés)
3. $\frac{1}{a^p + b^q}, (p, q) \in \mathbb{N}^2$ (avec $a > 1$ et $b > 1$ fixés)
4. $\frac{1}{x^2}, x \in \mathbb{Q} \cap [1, +\infty[$
5. $\left(\frac{1}{a^m + b^n} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}, (a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.

Exercice 21 $(X)^*$ Déterminer si la famille suivante est sommable : $\frac{1}{N(v)^\alpha}, v \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$, avec N norme sur $\mathbb{R}^d$ fixée. On admettra que toutes les normes sur $\mathbb{R}^d$ sont équivalentes.

Exercice 22 * On pose pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{p^2 - q^2} & \text{si } p \neq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}$ et $\sum_{q=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}$. En déduire que la famille n'est pas sommable.

Exercice 23 Montrer la convergence et calculer les sommes suivantes (éventuellement en fonction des $\zeta(k)$) :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$
3. $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2 q^2}$
4. $\sum_{\substack{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$.

Exercice 24 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n . Montrer que pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$, après avoir montré la convergence des séries.

Exercice 25 Montrer que pour $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$, on a l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Exercice 26 (Mines) Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1) (2^n(\zeta(n)-1)-1)$.

Exercice 27 (Mines)* On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n , $\varphi(n)$ l'indicatrice d'Euler et ζ la fonction de Riemann.

1. Montrer que, pour $\alpha > 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$. Que dire pour $\alpha \leq 1$?
2. Montrer que, pour $\alpha > 2$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha-1)}{\zeta(\alpha)}$. Que dire pour $\alpha \leq 2$?

Exemples et contre-exemples :

Exercice 28 (Mines) Existe-t-il une suite u à valeurs réelles strictement positives telle que $\sum u_n$ converge et telle que $\ln u_n \sim -\ln n$?

Exercice 29 (Mines)* Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

1. Suffit-il que (na_n) tende vers 0 pour que la série $\sum a_n$ converge ?
2. La convergence de $\sum a_n$ entraîne-t-elle que (na_n) tend vers 0 ?
3. Si la suite (a_n) est décroissante, montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

Exercice 30 (Mines) Existe-t-il une suite réelle (u_n) telle que $\sum u_n$ converge et $\sum u_n^3$ diverge ?

Exercice 31 (ENS)*

1. Soit $u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ famille sommable. Montrer que pour tout $k \geq 2$ la famille (u_n^k) est sommable.

2. Soient u et v deux familles sommables telles que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k$. Montrer qu'il existe une permutation ϕ de $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{\phi(n)}$.
3. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe N et deux suites $(u_n)_{0 \leq k \leq N}$ et $(v_n)_{0 \leq k \leq N}$ telles que pour tout $k \in A$, $\sum_{n=0}^N u_n^k = \sum_{n=0}^N v_n^k$, mais qu'il n'existe aucune permutation de $\llbracket 0, N \rrbracket$ telle que pour tout n , $u_n = v_{\phi(n)}$.
4. Trouver une partie infinie de A et deux suites complexes u et v telles que pour tout $k \in A$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^k$, mais telles que u ne soit pas une permutation des éléments de v .

Autour de Raab-Duhamel :

Exercice 32 (*Mines*)* Soient $0 < a < b$ et (u_n) définie par $u_0 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$. Déterminer une CNS pour que la série de terme général u_n converge. Dans ce cas, donner la somme $\sum n(u_{n+1} - u_n)$. Puis calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 33 (*Mines*)* Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$ et $v_n = \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$.

1. Montrer que la série de terme général v_n est convergente.
2. En déduire l'existence de $C > 0$ tel que $n! \sim C \sqrt{n} n^n e^{-n}$.

Exercice 34 (*SR*)

1. Soient (a_n) et $(b_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que, à partir d'un certain rang, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Que peut-on dire des séries de termes généraux a_n et b_n ?
2. Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, avec $\alpha > -1$. Montrer que $\sum a_n$ diverge.
3. Que peut-on dire si $\alpha < -1$?

Comparaison séries-intégrales :

Exercice 35 (*CCPIN*)*

1. Expliquer que pour tout $x \in [0, 1[$ la série $\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Que peut-on dire pour $x = 1$?
2. On note, pour tout $x \in [0, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$. En utilisant la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \frac{e^{-ut}}{1+e^{-ut}} \end{cases}$ (pour un u bien choisi), trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.

Exercice 36 (*Mines*) Soit f une fonction continue et croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

1. On suppose que $f(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x)$. Montrer que $\sum_{k=1}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^n f$.
2. Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse $f(x+1) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} f(x)$?

Exercice 37 (*X*) * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge, on note ℓ sa limite.
2. Montrer que $\ell = -(1 + \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$.

Exercice 38 (*Mines-X*)* Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que la suite des $\left(\int_1^n |f'(t)| dt \right)_n$ est bornée.

1. Montrer que les séries $\sum f(n)$ et $\sum \int_n^{n+1} f(t) dt$ ont même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Exercice 39 (*X-ENS-Mines*)**

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge. En fonction des valeurs de α , quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$?
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ converge. En fonction des valeurs de α , quelle est la nature de la série $\sum \frac{u_n}{R_n^\alpha}$?

Exercice 40 (*Mines*) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

1. On suppose $\sum u_n$ convergente et on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Construire à partir de R_n une suite $v_n > 0$ croissante tendant vers $+\infty$ telle que $\sum u_n v_n$ converge.
2. On suppose $\sum u_n$ divergente. Construire v_n décroissante qui tend vers 0 telle que $\sum u_n v_n$ diverge.

Exercice 41 (*X*) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant : pour tout $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum y_n^2$ converge, la série $\sum x_n y_n$ converge. Montrer que $\sum x_n^2$ converge.

Indication : on pourra poser $y_n = \frac{x_n}{\sum_{k=0}^n x_k^2}$.

Exercice 42 (*PLSR*) Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Soient $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ des suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\sum a_n^p$ et $\sum b_n^q$ convergent. Montrer que $\sum a_n b_n$ converge.
2. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{R_n^\alpha}$.
3. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour toute suite $(b_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que $\sum b_n^q$ converge, $\sum a_n b_n$ converge. Montrer que $\sum a_n^p$ converge.

Sommation des relations de comparaison :

Exercice 43 (*Centrale*) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$. On suppose que $a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

1. Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
2. Donner un équivalent de a_n .

Exercice 44 (*Mines*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{+*})$ telle que $f(0) = 1$ et $f' < 0$. On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$.

1. Montrer que (a_n) est une suite décroissante positive convergeant vers 0.
2. Montrer que $\sum a_n$ diverge.

Exercice 45 (*X*) Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite u par les conditions $u_0 = a$ et, pour $n \geq 1$, $u_n = \tanh(u_{n-1})$.

1. Montrer la convergence de la suite u .
2. Donner un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 46 (*X*)^{*} Soient $c > 0$ et $f : [0, c] \rightarrow [0, c]$ une fonction continue, admettant en 0 un développement asymptotique de la forme $f(x) = x - ax^{1+\alpha} + o(x^{1+\alpha})$ avec $a > 0$ et $\alpha > 0$.

1. Montrer que, pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers 0.
2. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{a\alpha n} \right)^{1/\alpha}$.

3. Traiter l'exemple de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ puis de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+2x}$.

Exercice 47 (*Mines-Centrale*)* Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_1 > 0$ et :

$$\forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

1. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) converge-t-elle ? (On pourra montrer que (u_n) converge pour $\alpha > 1$ vers une limite notée ℓ .)
2. Trouver un équivalent de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge.
3. Trouver un équivalent de u_n dans le cas où la suite (u_n) diverge vers ℓ . (on pourra étudier $u_{n+1}^2 - u_n^2$).

Exercice 48 (*X*) Soit (a_n) une suite décroissante positive, $0 < a < 1$ et $c > 0$. Montrer que $a_n \sim c/n^a$ si et seulement si $\sum_{k=1}^n a_k \sim \frac{cn^{1-a}}{1-a}$.

Décomposition d'un réel :

Exercice 49 (*Centrale*) Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ où :

$$1. u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ a un 9 dans son écriture décimale} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad 2. u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ n'a pas de 9 dans son écriture décimale} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 50 (*ULCR*) Soit $q \in]1, 2[$. Montrer qu'il existe $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$, suite à valeurs dans $\{0, 1\}$, telle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n q^{-n} = 1$.

Exercice 51 (*X*) Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers naturels non tous nuls telle que $b_{n+1} \geq 2b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\theta = \sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-b_n}$ est un irrationnel.

Exercice 52 (*ENS*)* Soit $x \in [0, 1[$ et soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les chiffres de son écriture décimale propre. Montrer l'équivalence :

$$(x \in \mathbb{Q}) \Leftrightarrow (\exists N \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, a_{n+q} = a_n).$$

Exercice 53 (*Lyon*) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(n_i)_{i \geq 1} \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $n_{i+1} \geq n_i^2$ et que $\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n_i} \right)$.
2. Généraliser ce résultat.

Exercice 54 (*X*) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, soit $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2, v_n = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

1. Que dire de $(v_n)_{n \geq 2}$ si $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers le réel ℓ ?
2. On suppose que u_n est égal à 1 si le premier chiffre de l'écriture de n en base 10 est 1, à 0 sinon. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n \geq 2}$, puis celle de (w_n) .

Transformation d'Abel :

Exercice 55 (*Mines*)* Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge et que dans ce cas les deux séries ont la même somme et que $nu_n \rightarrow 0$.

Exercice 56 (*X*) Soient A une partie de $\mathbb{N}^*$, et f, g définies par : $\forall n \geq 2$,

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{k \in A} \quad \text{et} \quad g(n) = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{1}_{k \in A}}{k}.$$

Pour $l \in \mathbb{R}_+$, comparer les assertions $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = l$.

Exercice 57 (*Ulm*) Soient ω une racine complexe de l'unité et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante. Étudier la nature de la série $\sum \omega^n u_n$.

Exercice 58 (*Ulm*) Soient $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$, et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum \epsilon_n a_n$ converge. Montrer que $a_n \sum_{k=0}^n \epsilon_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Applications :

Exercice 59 (*Centrale-X*)* Pour tout $n \geq 2$, on note $P(n) = \max\{p \text{ premier}, p|n\}$. On souhaite étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{nP(n)}$ (on pourra utiliser des regroupements par paquets).

1. On note q_n le n -ième nombre premier ; montrer que $\forall k \geq 1, q_k \geq 2k - 1$.

On pose $A_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{q_k}}$.

2. Montrer que $\sum \frac{1}{nP(n)}$ converge si et seulement si $\sum \frac{A_n}{q_n^2}$ converge et qu'elles ont même somme en cas de convergence.
3. Montrer l'existence d'une constante C telle que : $\forall n \geq 2, \ln(A_n) \leq C_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \leq C + \frac{1}{2} \ln(n)$.
4. Conclure.

Exercice 60 (*Mines*) .On note pour $j \in \mathbb{N}^*$, $k_j = \min \left\{ n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\}$.

1. Montrer que k_j est bien définie.
2. Nature de $(k_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer que $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{k_{j+1}}{k_j} = e$.

Exercice 61 (*X-Centrale*)* Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $d(k)$ le nombre de diviseurs de k dans $\mathbb{N}^*$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \sum_{k=1}^n d(k)$. Donner un équivalent de D_n .
2. Soit γ la constante d'Euler. Montrer que $D_n = n \ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.

Exercice 62 (*X*)* On rappelle que μ désigne la fonction de Möbius et ζ la fonction de Riemann.

1. Montrer que $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.
2. On rappelle que ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\phi(n)}{n} = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}$.
3. Montrer que $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \phi(k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\pi^2}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère deux variables aléatoires indépendantes X_n et Y_n suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, et on note p_n la probabilité de l'événement $(X_n \wedge Y_n = 1)$. Montrer que la suite (p_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 63 (*PLSR*)*

1. Déterminer la nature de chacune des séries $\sum \frac{\sin n}{n}, \sum \frac{\sin^2 n}{n}, \sum \frac{|\sin n|}{n}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \llbracket 1, Q \rrbracket$ tels que $|qx - p| \leq \frac{1}{qQ}$. En déduire qu'il existe une infinité de couples (p, q) de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}$.
3. On admet que π est irrationnel. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n \sin(n)}$.

Exercice 64 (*PLSR*)*

1. On considère un réel $x \geq 1$ et $Q \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 1, Q \rrbracket$ tel que $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qQ}$.
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ (nombre de Liouville) est transcendant.