

Feuille d'exercices : Intégrale sur un intervalle quelconque

Existence et calculs

Exercice 1 (*CCINP-Mines-Centrale*) Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \frac{\ln x}{(1+x)(2+x)}$ sur $]0, \infty[$.
2. $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}}$ sur $]1, \infty[$.
3. $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. $t \mapsto \frac{\sinh t - \cos t}{t^{\frac{5}{2}}}$ sur $]0, 1[$.
5. $t \mapsto \frac{\sin t}{\ln t}$ sur $[a, \infty[$.
6. $t \mapsto \frac{\ln t - \ln(1 - e^{-t})}{t} e^{-\alpha t}$ sur $]0, +\infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
7. $t \mapsto \cos(t^2)$ sur $[0, \infty[$.

Exercice 2 (*CCINP*) On définit $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ et $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$.

1. Trouver les conditions sur (α, β) telles que I_1 soit définie.
2. Même question avec I_2 .
3. Tracer dans un repère (α en abscisses et β en ordonnées) les couples (α, β) qui rendent I_1 et I_2 définies.

Exercice 3 (*Mines*) Existence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \ln(x)}{x} dx$.

Exercice 4 (*X MPI*) Déterminer les réels α et β tels que $\int_0^{+\infty} |\sin t|^\alpha t^\beta dt < +\infty$.

Exercice 5 (*Mines*) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} t |\cos t|^{t^5} dt$, $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^x dx$ puis de $\int_0^{+\infty} |\sin(x)|^{x^\alpha} dx$ avec $\alpha \in]1, +\infty[$.

Exercice 6 (*Mines*)* Soit f continue et T -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'existence et l'unicité de λ tel que $\int_1^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$ converge.

Exercice 7 (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et T -périodique.

1. À quelle condition f admet-elle une primitive T -périodique ?
2. On suppose à présent que $\int_0^T f(x) dx \neq 0$, et on fixe un réel $a \in]0, 1[$. Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{f(t)}{t^a} dt$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 8 (*Mines-Centrale*) Vérifier l'existence et calculer la valeur des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$.
2. $\int_1^\infty \frac{t \ln t}{(1+t^2)^2} dt$.
3. $\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.
4. $\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x} dx$.
5. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \operatorname{Arcsin} \left(\frac{1}{t} \right) \right) dt$.
6. $\int_1^{+\infty} \frac{x - [x]}{x^2} dx$.

Exercice 9 (*X*) Justifier l'existence et calculer $\int_0^1 \frac{dt}{2 + [\frac{1}{t}]}$.

Exercice 10

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, $e^{-t^2} \leq \frac{1}{(1 + \frac{t^2}{n})^n}$.
2. Montrer que pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$ $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\infty \frac{dt}{(1 + \frac{t^2}{n})^n} = \sqrt{n} W_{2n-2}$ et $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n = \sqrt{n} W_{2n+1}$, avec (W_n) les intégrales de Wallis.
4. Après avoir démontré que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Exercice 11 (*Mines-Centrale*)*

1. Existence et calcul, pour $n \in \mathbb{N}$ de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} dt$ (on pourra calculer la différence de deux termes consécutifs).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - I_n = 0$.
3. En déduire $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

Exercice 12 (*Mines*) Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Quel es son intervalle de définition. Est-elle intégrable sur cet intervalle ?

Exercice 13 (*Mines*) Soit F définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall x > 0, F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Montrer que F est bien définie.
2. Montrer que F est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.

Exercice 14 (*SR-X MPI*) On considère $0 < a \leq b$.

1. Pour $a, b > 0$, on définit $I(a, b) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a \cos \theta)^2 + (b \sin \theta)^2}}$.

Montrer que $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}$.

2. Calculer $I(a, a)$ et montrer que

$$I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

3. On définit deux suites réelles $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ par $a_0 = a, b_0 = b$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Étudier la convergence de $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$. En déduire $I(a, b)$.

Lien avec les séries

Exercice 15 (*X-Mines*) *

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ avec f' intégrable. Montrer que $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\int_0^{+\infty} f$ converge.
2. Nature de $\sum \frac{\sin \sqrt{n}}{n}, \sum \frac{\cos \sqrt{n}}{n}, \sum \frac{\cos(\ln n)}{n}, \sum \frac{\cos(\ln n)}{\ln n}$?

Exercice 16 (*Mines*)

1. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Nature de $\sum u_n^2$?
2. Soit f une fonction continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Nature de $\int_0^\infty f^2$?

Exercice 17 (*Mines*)

1. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f$ est convergente.
Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ est une intégrale convergente.
2. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ est une série convergente.

Exercice 18 (*Mines*) *

1. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto x f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante et intégrable.
Étudier la limite éventuelle de $x \mapsto x f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 19 (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante.

1. On suppose que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Étudier la réciproque.

Exercice 20 (*Mines*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ telle que f' est bornée et $\int_{\mathbb{R}} f$ converge. Montrer que $\lim_{+\infty} f = \lim_{-\infty} f = 0$.

Exercice 21 (*Mines*) Soient $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$, ℓ_1 et ℓ_2 deux réels tels que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell_1$ et $x f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ell_2$. Que vaut ℓ_2 ?

Exercice 22 (*X*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable et lipschitzienne. Peut-il exister un réel x non nul tel que la série de terme général $f(nx)$ diverge ?

Méthodes classiques

Exercice 23 (*Mines*) * Soient $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\int_0^{+\infty} e^{-s_0 t} f(t) dt$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge pour tout $s \geq s_0$.

Exercice 24 (*SR*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ continue tel que $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$. On note $g : y \in \mathbb{R}^+ \mapsto \int_y^{+\infty} f(x) dx$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx \in [0, +\infty]$.
2. On suppose dans la suite que f est décroissante. Montrer qu'il existe un unique $m > 0$ tel que $\int_0^m f(x) dx = \frac{1}{2}$.
3. Montrer que $\int_0^{+\infty} x f(x) dx \geq m$.
4. Peut-on avoir égalité ?

Exercice 25 (*X*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. On suppose que f' s'annule en un unique $M \in \mathbb{R}$.

1. Donner le tableau de variations de f .
Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $\int_{-\infty}^m f(t) dt = \frac{1}{2}$.
2. Montrer que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x_1 < M < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2) = \ell$.
3. Supposons que, pour tout $\ell \in]0, f(M)[$, $f'(x_1) + f'(x_2) > 0$. Montrer que $m > M$.

Exercice 26 (*Ulm-Centrale-Mines*) * Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ converge.

1. Justifier l'existence de $\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$, pour $\epsilon > 0$.
2. Calculer $l = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(t)}{t} dt$.
3. Montrer que $\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ converge et en calculer la valeur.

- Montrer que $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ et $\int_0^\infty \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ convergent et calculer leur valeur.
- Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $a \neq b$. Calculer $\int_0^\infty \frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x} dx$.
- Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x} dx$.
- Montrer que $\int_0^1 \frac{1-t}{\ln t} dt = -\ln 2$.

Exercice 27 (*Mines*) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, admettant une limite ℓ en $-\infty$ et telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer l'existence et calculer pour $a < b$ l'intégrale $I(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+a) - f(t+b)) dt$.

Exercice 28 (*PLSR*) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-R, R]$, $f(x) = 0$.

- Montrer que $\varepsilon \mapsto \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ admet une limite en 0^+ .
On note $\text{vp} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right)$ cette limite.
- On note $T_f: x \mapsto \int_{-\infty}^x f(y) \ln |y-x| dy + \int_x^{+\infty} f(y) \ln |y-x| dy$. Justifier que T_f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que T_f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T_f)'(x) = \text{vp} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y+x)}{y} dy \right).$$

Exercice 29 (*X-MPI*) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $g: x \in \mathbb{R}^* \mapsto f\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$. Exprimer $\int_{-\infty}^0 g + \int_0^{+\infty} g$ en fonction de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$.

Limites et équivalents

Exercice 30 (*X*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge et telle que $x \mapsto \int_x^{x+1} f'^2$ est bornée. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Exercice 31 (*Centrale*)* Équivalent en 0 et en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

Exercice 32 (*Paris*) Déterminer la limite de $\frac{1}{A} \int_1^A A^{1/x} dx$ lorsque A tend vers $+\infty$.

Exercice 33 (*Lyon*) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)} dx = +\infty$.

Exercice 34 (*Paris*) Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt$.

Exercice 35 (*Mines*)*

- Montrer l'existence de $I = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$.
- Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{it^2} dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{ie^{ix^2}}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Exercice 36 (*Mines*) Soit f une fonction continue par morceaux et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^x f$.

1. Déterminer la limite de g en 0.
2. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

Exercice 37 Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que pour un certain $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$,

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \sim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{t}.$$

1. Selon les valeurs de λ , f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?
2. Dans le cas où f est intégrable, donnez un équivalent simple des restes ; dans l'autre cas, donnez un équivalent simple des intégrales partielles.

Exercice 38 (Mines) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f'/f tend vers une limite $a \in \mathbb{R}^{-*}$ en $+\infty$.

1. Montrer que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.
2. Donner un équivalent de $\int_x^{+\infty} f$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Inégalités et optimisation

Exercice 39 (Mines-Centrale) On note $E = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), f^2 \text{ et } f''^2 \text{ sont } \mathbb{R}_+ - \text{intégrables}\}$. Soit $f \in E$.

1. * Montrer que ff'' est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. * En déduire que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)f'(x) = 0$.
3. * Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^2 = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} (f'(x))^2 = 0$.
4. * Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et telle que f^2 et f''^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$, montrer que f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\|f'\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|f''\|_2$.
5. Pour tout $g \in E$, on définit $J(g) = \int_0^{+\infty} (g^2 - g'^2 + g''^2)$. Montrer en le déterminant que J admet un minimum sur E . On pourra utiliser que $(g + g' + g'')^2 = (g^2 - g'^2 + g''^2) + 2(g + g')(g' + g'')$.
6. Soit $f \in E$. Montrer que $\|f'\|_2^2 \leq 2\|f\|_2 \|f''\|_2$. On pourra utiliser $x \mapsto f(\mu x)$.

Exercice 40 (Mines)

1. On note L^2 le sous-espace des f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que L^2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ tel que f, f', f'' appartiennent à L^2 . Montrer que f' et f ont une limite réelle que l'on précisera en $+\infty$.
3. Avec les notations de (b), montrer que $\int_0^{+\infty} (f''^2 - 4f'^2 + 16f^2) \geq 0$ et caractériser le cas d'égalité.

Exercice 41 (Centrale)*

1. Soit E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ intégrables, muni de la norme $\|\cdot\|_1$.
Soit $a > 0$. Pour $f \in E$, on définit $\phi(f) = g$ par $g(x) = e^{-ax} \int_0^x e^{at} f(t) dt$. Montrer que g est intégrable.
Puis montrer que ϕ est un endomorphisme continu de E i.e : $\exists M > 0, \forall f \in E, \|\phi(f)\|_1 \leq M\|f\|_1$.
2. On se place maintenant sur l'espace F des fonctions de carré intégrable muni de la norme $\|\cdot\|_2$. Étudier la même question dans ce cas.

Exercice 42 (Centrale-X) * Soit E l'espace vectoriel constitué des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable

que l'on munit de la norme définie par $\|f\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} f^2 \right)^{1/2}$.

Pour $f \in E$, on pose $\phi(f) = g$, où $g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ si $x > 0$ et $g(0) = f(0)$.

1. Montrer que $T(f)$ est continue.
2. Soit $A > 0$. Montrer que

$$\int_0^A T f(x)^2 dx \leq 2 \int_0^A \frac{f(x)}{x} \left(\int_0^x f \right) dx.$$

En déduire que $Tf \in E$ et que $\|Tf\| \leq 2\|f\|$ (*).

3. Déterminer $\sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|\phi(f)\|}{\|f\|}$. On pourra considérer les fonctions $f_a : t \mapsto t^{-a}$.

Exercice 43 (*Mines-X*) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que f'^2 est intégrable. Montrer que l'application $t \in [1, +\infty[\mapsto \frac{f(t)^2}{t^2}$ est intégrable.

Exercice 44 (*Mines*) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On note F la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ sont de même nature.

Exercice 45 (*Mines*) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. On suppose que f et f^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que f' est croissante. Montrer que, pour $x \geq 0$, $\int_x^{+\infty} f^2 \leq \frac{2}{3} f(x) \int_x^{+\infty} f$.

Exercice 46 (*ENS*) Soit $p > 1$.

1. Démontrer l'inégalité de Hölder.

2. Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$, positive, telle que f^p soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $F : x > 0 \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$. Montrer que F^p est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\int_0^{+\infty} F^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{+\infty} f^p$.

Exercice 47 (*Paris*) Soient $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ de carré intégrable et $g : x \mapsto f(x) - 2e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$. Montrer que $\int_0^{+\infty} g^2 = \int_0^{+\infty} f^2$.

Exercice 48 (*X*) Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 bornées par 1. Déterminer $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f \varphi' ; \varphi \in E \right\}$.

Exercice 49 (*X-MPI*) Soit $F = \{f \in C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), f(0) = 1\}$. Pour $f \in F$, on définit : $J(f) = \int_0^{+\infty} (f^2(x) + f'^2(x) + e^{-2x} f(x)) dx$. Calculer $I = \inf_{f \in F} J(f)$.

Autour de la formule des résidus

Exercice 50 (*Mines-X*)* Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, avec $\deg(P) \leq \deg(Q) - 2$. On suppose que Q n'a pas de racines réelles ; on notera Z l'ensemble de ses racines.

1. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Montrer l'existence et donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t-z)^k}$.
2. Montrer l'existence de la limite quand r tend vers l'infini de $\int_{-r}^r \frac{dt}{t-z}$, et en donner la valeur.
3. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt$ converge et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = i\pi \sum_{z \in Z} \epsilon(z) \alpha(z),$$

avec $\epsilon(z)$ le signe de la partie imaginaire de z , et $\alpha(z)$ le coefficient devant $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$.

4. Dans le cas où P et Q sont des polynômes des $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)}{Q(t)} dt = 2i\pi \sum_{z \in Z_+} \alpha(z),$$

où Z_+ est l'ensemble des racines de Q dans le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$.

5. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t(t+1)}{(t^2+1)^2} dt$ et de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt$.

Exercice 51 (*X*) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$. Justifier la convergence de l'intégrale $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln(|P(re^{it})|) dt$, puis la calculer en fonction de $P(0)$ et des racines de P de module strictement inférieur à r .