

Feuille d'exercices : Polynômes et fractions rationnelles

Division euclidienne, divisibilité, PGCD

Exercice 1 (CCP-IMT)

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Donner le reste de la division euclidienne de $P(X) = (X \sin \theta + \cos \theta)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice 2 (Mines) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X - 3)^{2n} + (X + 2)^n - 2$ par $(X - 3)^3$.

Exercice 3 (IMT)

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$.

Exercice 4 (Mines) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul tel que $P(X^2) = P(X - 1)P(X)$.

1. Montrer que toute racine de P est de module 1.
2. Déterminer P .

Exercice 5 (Mines-Centrale)*

1. Déterminer les polynômes P tels que P' divise P .
2. Déterminer les polynômes P tels que P divise XP' .

Exercice 6 * Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Notons (q, r) le couple quotient/reste de la division euclidienne de m par n .

1. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$.
2. En déduire une C.N.S. portant sur n et m pour que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Quel est le PGCD de $X^n - 1$ et $X^m - 1$?

Exercice 7 (Centrale)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Pour $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, on pose $\mathcal{F}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$ et

$$\check{\mathcal{F}}(P) = \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) X^k.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}$ et $\check{\mathcal{F}}$ sont des automorphismes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
2. Calculer $\check{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F}$.
3. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, $|P(z)| \leq 1$. On suppose que P possède une racine dans $\mathbb{U}_n$. Montrer que $X^n - 1$ divise P .

Exercice 8 (Lyon) Quels sont les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leq 1$?

Exercice 9 (SR) Soit $(A, +, \times)$ un anneau intègre (donc commutatif). On suppose que A est euclidien, c'est-à-dire qu'il existe une fonction $t : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) $\forall (a, b) \in A \times (A \setminus \{0\}), \exists (q, r) \in A^2, a = bq + r$ et $(r = 0 \text{ ou } t(r) < t(b))$.
- (ii) $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0\})^2, t(ab) \geq t(a)$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}[X]$ sont euclidiens, tout comme n'importe quel corps $\mathbb{K}$.
2. Montrer que tout idéal de A est principal.
3. On suppose que $t(1_A) = 0$. Montrer que les éléments inversibles de A sont les $u \in A \setminus \{0\}$ tels que $t(u) = 0$.
On suppose dans toute la suite de l'exercice que dans l'hypothèse (i) il y a en plus unicité du couple (q, r) solution.
4. Montrer que $t(a + b) \leq \max(t(a), t(b))$ quels que soient $a \in A \setminus \{0\}$ et $b \in A \setminus \{0\}$ tels que $a + b \neq 0$.
5. Montrer que $A^\times \cup \{0\}$ est un sous-corps de A .
6. Montrer que A est un corps ou est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ pour un corps $\mathbb{K}$.

Racines et factorisation des polynômes

Exercice 10 (Mines-IMT) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 11 (Mines) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = (1 + iX)^n - (1 - iX)^n$.

1. Déterminer, selon la parité de n , le degré de P .
2. Déterminer les racines de P dans les deux cas : n pair et n impair et en déduire la décomposition de P en polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
3. En déduire, lorsque n est impair, la valeur de $\sum_{k=0}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 12 (*Mines-IMT*) Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$ et $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Cas de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$

Exercice 13 (*IMT-Mines*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que si P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$, alors $P' - \lambda P$ est simplement scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que si P est scindé sur $\mathbb{R}$, alors P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
4. Comparer les moyennes arithmétiques des racines de P et P' .

Exercice 14 (*Mines*) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, E une partie finie de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $|P^{-1}(E)| \leq n|E|$.
2. Quel est le degré de $P \wedge P'$?
3. Montrer que $|P^{-1}(E)| \geq (|E| - 1)n + 1$.

Exercice 15 (*Centrale-X*)* Soit $\Gamma = \{P \in \mathbb{R}[X], \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2\}$.

1. Montrer que Γ est stable par produit.
2. Montrer l'équivalence : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P \in \Gamma) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0)$.
3. Montrer l'équivalence : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\exists (A, B) \in \Gamma^2, P = A + XB)$.
4. Montrer que tout $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^2 + V^2$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Est-ce que n'importe quel $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit $U^3 + V^3$ avec U et V dans $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 16 (*Centrale*)* Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, soit $Z(P)$ l'ensemble des racines de P dans $\mathbb{C}$. Soient P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ non constants tels que $Z(P) = Z(Q)$ et $Z(P - 1) = Z(Q - 1)$. Montrer que $P = Q$.

Exercice 17 (*X*)* Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) - P(X - 1) = Q$ et $P(0) = 0$.

Exercice 18 (*X*)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Montrer que $\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Exercice 19 (*X-Paris*)** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P = X^n - a_1 X^{n-1} + a_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n a_n \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n , scindé sur $\mathbb{R}$, de racines réelles $x_1, \dots, x_n$.

Montrer que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\left| x_k - \frac{a_1}{n} \right| \leq \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1} a_2}.$$

Exercice 20 (*X*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n , $Q = 2XP' - nP$.

1. On suppose que les racines de P sont toutes dans $\mathbb{U}$. Montrer qu'il en est de même de celles de Q .
2. Soit $R \in \mathbb{R}^+$. On suppose que toutes les racines de P sont de module R . Que dire de celles de Q ?

Exercice 21 (*X*) * Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P induit une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que P appartient à $\mathbb{Q}[X]$.
2. Montrer que P est de degré 1.

Exercice 22 (*X*) Soient (a_n) une suite de complexes non nuls, et $P_n = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$. Soit $r > 0$. Montrer que pour n assez grand, les racines de P_n ne sont pas toutes dans le disque $|z - r| < r$.

Exercice 23 (*PLSR*) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 (*Ulm*) Deux polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacés lorsque :

- P et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
- P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
- entre deux racines consécutives de P (resp. Q) il y a une unique racine de Q (resp. P).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

Exercice 25 (*Ulm*) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, non-nuls. On suppose que $\deg(Q) = \deg(P) - 1$, que Q est SARS sur $\mathbb{R}$, et que P et Q n'ont aucune racine en commun. On pose enfin $F = \frac{P}{Q}$, $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Montrer l'équivalence entre :

- P est scindé sur $\mathbb{R}$ et P et Q sont entrelacés
- $F(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$

Irréductibilité et extension de corps

Exercice 26 (*Mines*)*

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle a .
2. Donner une base de $V = \operatorname{Vect}_{\mathbb{Q}} \{a^k, k \in \mathbb{N}\}$.
3. L'espace V est-il un corps pour les lois usuelles ?

Exercice 27 (*X*)* Soit $\omega = e^{\frac{2\pi}{5}}$.

1. Déterminer le polynôme minimal de ω .
2. On pose $\mathbb{K} = \operatorname{Vect}(1, \omega, \omega^2, \omega^3)$. Déterminer sa dimension comme $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Montrer que c'est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
3. Comment trouver l'expression de l'inverse d'un élément non nul de $\mathbb{K}$?
4. Montrer qu'il existe un unique automorphisme σ de $\mathbb{K}$ tel que $\sigma(\omega) = \omega^2$.
5. Soit τ un automorphisme de $\mathbb{K}$ Montrer qu'il existe $1 \leq k \leq 4$ tel que $\tau = \sigma^k$.

Exercice 28 (*Mines*) Quelle est la dimension du $\mathbb{Q}$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\mathbb{U}_5$?

Exercice 29 (*Mines-ENS*)* Soit A une $\mathbb{R}$ -algèbre commutative intègre de dimension finie.

1. Montrer que A est un corps.
2. Montrer que, pour tout $a \in A$, l'ensemble $\{P \in \mathbb{R}[X], P(a) = 0\}$ est un idéal engendré par un polynôme irréductible.
3. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 30 (*X*) Soit K une $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension finie, contenant $\mathbb{R}$ et telle que tout élément non nul de K soit inversible.

1. Soit $a \in K \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R}[a]$ est une sous-algèbre de K isomorphe à $\mathbb{C}$.
2. On suppose dans cette question que la dimension de K vaut 2, 3 ou 4. Montrer que K est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou à l'algèbre des quaternions $\operatorname{Vect}(1, i, j, k)$ avec les relations $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Exercice 31 (*Mines*) Soit $P = X^3 - 3X + 1$. Montrer que P admet trois racines réelles irrationnelles. Montrer qu'aucune de ces racines n'est annulée par un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 2.

Exercice 32 (*X*) Montrer que $\alpha = \frac{12+5i}{13}$ n'est pas une racine de l'unité. Est-il racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Q}$? Dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 33 (*Paris*) Soit $\phi: \mathbb{Q}[X] \rightarrow \mathbb{C}$ un morphisme de $\mathbb{Q}$ -algèbres. On suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible et unitaire dans le noyau de ϕ . Soit G le groupe additif de $\mathbb{C}$ engendré par les $(\phi(X^m))_{m \in \mathbb{N}}$ et soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par G . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que G soit dense dans E .

Cas de $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 34 (*Mines-X*) * Soient $a_1 < \dots < a_n$ des entiers relatifs, $P = 1 + \prod_{i=1}^n (X - a_i)^2$. Montrer que P est un irréductible de $\mathbb{Z}[X]$. Montrer de même que $\prod_{j=1}^n (X - a_j) - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 35 (ULCR) Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $0 < a_1 < \dots < a_n$ des entiers. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \prod_{k=1}^d (X - na_k) - 1$.

1. Étudier le comportement asymptotique des racines de P_n .
2. Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}$ pour tout n assez grand.

Exercice 36 (X)* Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est premier. Montrer que P est constant.

Exercice 37 (SR)* Soit $I = \{P \in \mathbb{C}[X] ; \forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}\}$. On pose $H_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $D_n(P) = \Delta^n(P)(0)$.

1. Montrer que $(H_n)_{n \geq 0}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que, pour tout n , $H_n \in I$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta(H_n) = H_{n-1}$.
4. Montrer que $I \subset \mathbb{Q}[X]$.
5. Soient $P_1, P_2 \in I$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P_1(n)$ soit premier avec $P_2(n)$. Montrer qu'il existe $U_1, U_2 \in I$ tels que $U_1 P_1 + U_2 P_2 = 1$.

Exercice 38 (X)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note μ_n l'ensemble des racines primitives n -ièmes de 1 et on pose $\Phi_n = \prod_{z \in \mu_n} (X - z)$.

1. Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d = X^n - 1$, puis que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, Φ_n est dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Soit μ la fonction de Möbius de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{1,n}$.
3. Soient $(G, +)$ un groupe abélien, f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans G , F la fonction définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.
Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$. Comment se transforme cette formule si $(G, \times)$ est un groupe multiplicatif et f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans G ?
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression de Φ_n à l'aide des $X^d - 1$ pour d divisant n .

Exercice 39 (L) On pose $\Phi_1(X) = X - 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d < n}} \Phi_d(X)}$.

1. Montrer que $\Phi_n(X) = \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \wedge n = 1}} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
2. Montrer que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
3. Montrer que, pour p et q deux nombres premiers distincts, Φ_{pq} est à coefficients dans $\{0, \pm 1\}$.
4. Donner le coefficient en X^7 dans Φ_{105} .

Exercice 40 (X)

1. Décomposer $X^5 - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit p un nombre premier. Décomposer $X^p - 1$ en produit d'irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 41 (X) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3}$?

Exercice 42 (PLSR) Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M un idéal de A . On dit que M est maximal si M est différent de A et si tout idéal de A contenant M est égal à M ou à A .

1. Soit M un idéal de A . Montrer que M est maximal si et seulement si, pour tout $a \notin M$, il existe $x \in M$ et $u \in A$ tels que $1 = x + u \times a$.
2. Soient $(B, +, \times)$ un anneau commutatif et $f : A \rightarrow B$ un morphisme surjectif de A sur B . Montrer que si M est un idéal maximal de A alors $f(M)$ est un idéal maximal de B .
3. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$.
4. Soit M un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe p premier tel que $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. Puis montrer qu'il existe P et Q irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $M = (P) + (Q)$.

Exercice 43 (*L*) Soit p un nombre premier, dont on note $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}^{10}$ l'écriture décimale. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 44 (*X*) On note $I_n(x) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n \cos(xt) dt$. Montrer que pour tout n , il existe P_n et Q_n polynômes de $\mathbb{Z}_{2n}[X]$ tels que $I_n(x) = \frac{n!}{x^{2n+1}} (P_n(x) \cos(x) + Q_n(x) \sin(x))$.
En déduire que $\pi/2$ est irrationnel.

Cas des corps finis et de $A[X]$

Exercice 45 (*PLSR*) Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p .

1. Montrer que $\sigma: x \mapsto x^p$ est un morphisme de corps de $\mathbb{K}$.
2. Montrer que σ est surjectif si et seulement si tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible vérifie $P' \neq 0$.

Exercice 46 (*PLSR*)

1. Montrer qu'un groupe fini G est cyclique si et seulement si pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ divisant n , G a au plus un sous-groupe de cardinal d .
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Montrer que $\mathbb{K}^*$ est cyclique.
3. Soit p un nombre premier impair et soit $\mathbb{K}$ un corps fini de cardinal p^2 . Montrer que $X^4 + 1$ admet toujours une racine dans $\mathbb{K}$.
4. En déduire que $X^4 + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ n'est pas irréductible.

Fractions rationnelles

Exercice 47 (*Centrale*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 .

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$ et on considère x tel que $P'(x) = 0$ et $P(x) \neq 0$. En utilisant $\frac{P'}{P}$, montrer que $P''(x)P(x) < 0$.
2. Soient x_1 et x_2 deux racines consécutives de P . Montrer que $P'(x_1)P'(x_2) \leq 0$.
3. Soient $a < b$ tels que $P - a$ et $P - b$ sont scindés. Montrer que P' est scindé à racines simples.

Exercice 48 (*Mines-Centrale-ENS*)*

1. (*Th. de Gauss-Lucas*) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Montrer que toute racine de Q' est barycentre à coefficients positifs des racines de Q .
2. (ENS) En déduire pour $1 \leq n \leq 4$ la conjecture (de Casas-Alvero) : soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, P et $P^{(i)}$ aient une racine commune ; alors P a une unique racine.

Exercice 49 (*X-Mines*)* Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé.

1. Montrer que $x \mapsto (P'(x))^2 - P(x)P''(x)$ est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
2. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, montrer que pour tout $1 \leq k \leq n-1$, $a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$.

Exercice 50 (*PLSR*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $n P(x) P''(x) \leq (n-1) P'(x)^2$.
2. Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

Exercice 51 (*Lyon*) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n > 0$. Montrer que P est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(P^{(i)}(x))^2 - P^{(i-1)}(x)P^{(i+1)}(x) > 0$.

Exercice 52 (*X-ENS*)*

1. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.
2. Déterminer les $F \in \mathbb{C}(X)$ tels que $F(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

Exercice 53 (*Mines*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme scindé à racines simples. On note $x_1, x_2, \dots, x_n$ ses racines. On suppose que P ne s'annule pas en 0.

1. Montrer que : $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}$.

2. Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg Q \leq n - 2$. Calculer $\sum_{i=1}^n \frac{Q(x_i)}{P'(x_i)}$.

Exercice 54 (*Mines*) Soient $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes deux à deux distincts, $P = \prod_{i=1}^n (X - z_i)$. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{P''}{P'}(z_k)$.

Exercice 55 (*X*) Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P .

1. Montrer que P est à racines simples.
2. Montrer que les racines de P sont alignées.

Exercice 56 (*Centrale-ENS L-Mines-X*)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines complexes $X^n + 1$.

1. À l'aide de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\frac{1}{X^n + 1}$, calculer $\sum_{z \in U_n} \frac{z}{1 - z}$.
2. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n} \sum_{z \in U_n} \frac{zP(zX)}{(z - 1)^2}$.
3. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|Q\| = \sup_{z \in U} |Q(z)|$. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\|P'\| \leq n\|P\|$.

Exercice 57 (*X*) Soient $(m_i)_{1 \leq i \leq n}$ des éléments de $\mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ des nombres réels dans l'ordre strictement croissant, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_j, 1 \leq j \leq n\}$, on pose $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x - x_i}$. Montrer que $f^{-1}[a, +\infty[$ est une réunion finie d'intervalles bornées. Calculez la somme des longueurs des intervalles.

Exercice 58 (*X-ENS*)*

1. Soient $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$, non nuls et premiers entre eux, tels que $A + B = C$. Soit m le nombre de racines distinctes de ABC . Montrer que $m > \max(\deg(A), \deg(B), \deg(C))$.
Ind. Montrer l'égalité $A \left(\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} \right) = B \left(\frac{C'}{C} - \frac{B'}{B} \right)$
2. Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et $P, Q, R \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P^n + Q^n + R^n = 0$. Montrer que P, Q, R sont égaux à constante multiplicative près.

Exercice 59 (*ENS Lyon-Mines*)* Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe un unique $P_N \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P_N(X + X^{-1}) = X^N + X^{-N}$.
2. Déterminer les $r \in \mathbb{Q}$ tels que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.
3. Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_N}$.

Exercice 60 (*X*)*

Si $F \in \mathbb{C}(X)$ est non constant, on pose $\Phi_F : R \in \mathbb{C}(X) \mapsto R(F) \in \mathbb{C}(X)$.

1. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ non constant. Montrer que Φ_F est un endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.
2. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est de la forme Φ_F avec F non constant.
3. Montrer que tout endomorphisme d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$ est injectif.
4. Montrer que Φ est un automorphisme d'algèbre si et seulement s'il existe $R \in \mathbb{C}(X)$ tel que $\Phi(R) = X$.
5. Soit $F = \frac{P}{Q}$. On suppose que ϕ_F est un automorphisme. Montrer que $\deg(P) \leq 1$ et $\deg(Q) \leq 1$.
6. Déterminer complètement les automorphismes d'algèbre de $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 61 (*X*) Soient $F \in \mathbb{R}(X)$, $A = \{x \in \mathbb{Q}, F(x) \in \mathbb{Q}\}$ et $A' = \{x \in \mathbb{Z}, F(x) \in \mathbb{Z}\}$.

1. On suppose A infini. Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.
2. On suppose A' infini. Que peut-on dire de F ?