

Programme de colles - Semaine 2 - du 28/09 au 2/10

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$: Révisions de MPSI.

Algèbre générale :

Révisions et compléments sur les groupes : Groupe. Sous-groupe. Caractérisation. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. Produit fini de groupes. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.

Morphismes de groupes : Morphisme de groupes. Composée de morphismes de groupes. Réciproque d'un morphisme de groupes bijectif. Image directe et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes, automorphismes.

Construction du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Relation de congruence sur $\mathbb{Z}$. Loi additive sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Groupes monogènes et cycliques : Groupe monogène. Groupe cyclique. Exemples de $\mathbb{Z}$, du groupe des racines n -ièmes de l'unité, du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément. Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x . Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G , alors, pour k dans $\mathbb{Z}$, on a : $x^k = e \iff d|k$. L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x . L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe (la démonstration n'est officiellement exigible que dans le cas abélien mais a été vue dans le cas général; de même le théorème de Lagrange a été vu mais est hors programme).

Un groupe fini est cyclique si et seulement si il admet un élément d'ordre le cardinal du groupe. Générateurs d'un groupe cyclique. Un produit $G \times H$ de groupes cycliques est cyclique si et seulement si $|G| \wedge |H| = 1$. Sous-groupes d'un groupe cyclique.

Quelques rappels et compléments sur le groupe symétrique.

Compléments divers à redémontrer : dans un groupe abélien fini, le *ppcm* des ordres est le maximum des ordres. Actions de groupes et équations aux classes. Théorème de Cauchy.

Anneaux : Anneau. Sous-anneaux. Anneau intègre. Corps. Un corps est toujours un anneau intègre. Morphisme d'anneaux. L'image d'un morphisme d'anneaux est un sous-anneau. Groupe des inversibles d'un anneau. Produit fini d'anneaux.

Idéal d'un anneau : Idéal d'un anneau commutatif. Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs. Idéal engendré par un élément. Notation xA . Anneau principal. Idéaux de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{K}[X]$. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Loi multiplicative sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$. L'anneau est intègre si et seulement si n est premier. Groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier. Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier. Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme (d'anneaux) naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Application aux systèmes de congruences.

Indicatrice d'Euler : Définition et différentes caractérisations. Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers. Petit théorème de Fermat et Théorème d'Euler : pour tout a premier avec n , $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$.

Divisibilité dans un anneau commutatif intègre : Interprétation en termes d'idéaux.

Algèbres : Algèbre. Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$. Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.

Compléments hors-programmes divers : caractéristique d'un corps, idéaux maximaux, cyclicité d'un sous-groupe fini de $\mathbb{K}^*$ avec $\mathbb{K}$ corps *etc.*

Programme de la semaine prochaine : Révisons d'algèbre générale. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$; rappels de MPSI sur $\mathbb{K}[X]$, éléments algébriques, extensions de corps.